Théorème de Burnside

Benjamin Hellouin

Pour ce développement, on admet que le déterminant de van der Monde est non nul quand les λ_i sont distincts.

Proposition 1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est nilpotente.*
2. *Toutes les valeurs propres de A sont nulles.*
3. *$\forall k \in \{1 \ldots n\}, Tr(A^k) = 0$.*

Preuve. $1 \Rightarrow 2$ est trivial, $2 \Rightarrow 1$ découle immédiatement du théorème de Cayley-Hamilton. $2 \Rightarrow 3$ est immédiat en remarquant que $Tr(A^k) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^k$ où les λ_i sont les valeurs propres de A, comptées avec multiplicités.

On montre $3 \Rightarrow 2$. Si on note maintenant $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ les valeurs propres non nulles distinctes de A, de multiplicités respectives $m_1 \ldots m_r$, l'équation précédente s'écrit $Tr(A^k) = \sum_{i=0}^{n} m_k \lambda_i^k$. On peut également l'écrire sous la forme suivante :

(matrice de van der Monde)

Le déterminant de la matrice est non nul en tant que déterminant de van der Monde de λ_i distincts non nuls. Il s'agit donc d'un système de Cramer homogène, qui admet 0 comme unique solution. Donc $\forall i, \lambda_i = 0$.
Alternativement, on peut compter individuellement chaque valeur propre et obtenir une matrice dont une matrice principale est la matrice ci-dessous, et conclure par le théorème de Rouché-Fontené (système d'équations linéaires)

On utilise ce résultat pour montrer le théorème de Burnside.

Théorème 1 (de Burnside)**.** *Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$. G est fini si et seulement si il est d'exposant fini, i.e. $\exists k, \forall g \in G, g^k = 0$.*

Preuve. Le sens direct est une conséquence directe du théorème de Lagrange. Pour le sens réciproque, on prend k un tel exposant et $\{g_1 \ldots g_r\}$ une base de $Vect(G)$. On pose $\phi : G \to \mathbb{C}^r A \mapsto (Tr(Ag_i))_{1 \leq i \leq r}$. Alors $Im(\phi) \subseteq \{(TrA_1, \ldots, TrA_r) \mid A_1, \ldots, A_r \in G\}$ est finie.

En effet, tout $A \in G$ annule le polynôme $X^p - 1$, scindé à racines simples. Donc le polynôme minimal de A est scindé à racines simples, et A est diagonalisable. Les valeurs propres de A sont des racines de l'unité et les éléments de G

n'ont qu'un nombre fini de traces possibles.

Donc, il ne nous manque pour conclure que :

Lemme 1. *ϕ est injective.*

Preuve. Soient A et $B \in G$ tels que $\phi(A) = \phi(B)$. Alors

$$\forall i \in \{1 \dots r\},\ Tr(Ag_i) = Tr(Bg_i)$$

$$\forall X \in G,\ Tr((A - B)X) = 0$$

$$\forall Y \in G,\ Tr((AB^{-1} - I)Y) = 0$$

$$\forall Y \in G,\ Tr(AB^{-1}Y) = Tr(Y)$$

En posant $C = AB^{-1}$ et successivement $Y = I, C, C^2, \dots$, on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, Tr(C^k) = Tr(I)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, Tr((C - I)^k) = 0$$

(formule du binôme) Par le résultat précédent, $C - I$ est une matrice nilpotente et diagonalisable, donc nulle.