Théorème de Glaeser

Benjamin Hellouin

Théorème 1 (Théorème de Glaeser)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ de classe C^2. Si $D^2 f(x) = 0$ pour tout $x \in f^{-1}(0)$, alors $\sqrt{f}$ est de classe C^1 sur Ω.*

Remarque 1. *Si $f : \Omega \to \mathbb{R}_+^*$, appliquer la différentiabilité de fonctions composées ne présente aucune difficulté. En revanche, dans le cas général, $x \mapsto x^2$ de racine non différentiable fournit un contre-exemple.*

1 En dimension 1

Preuve : $f : I \to \mathbb{R}_+$ de $g = \sqrt{f}$. $\forall x \in f^{-1}(0)$, f admet un minimum en x et $f'(x) = 0, f''(x) \geq 0$.

Par la formule de Taylor-Young, on a $\frac{f(x+h)}{h^2} \to \frac{f''(x)}{2}$, soit $\frac{g(x+h)}{|h|} \to \sqrt{\frac{f''(x)}{2}}$ et g est dérivable si et seulement si $f''(x) = 0$ (dessin !). On prouve maintenant que, sous cette hypothèse, g' est continue, c'est-à-dire que $\forall t_0 \in f^{-1}(0)$, $\frac{f'(t)}{2\sqrt{f(t)}} \to_{t_0} 0$.

Soit $t_0 \in f^{-1}(0)$. On pose $I(\alpha) = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ et $M(\alpha) = \max_{I(\alpha)} |f''(t)|$. Par Taylor - reste intégral, on a $\forall t \in I(\alpha), f(t+h) - f(t) - f'(t)h = \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} f''(a+th)h^2 dt$, donc $0 \leq f(t+h) \leq f(t) + hf'(t) + h^2 \frac{M(\alpha)}{2}$. Si $M(\alpha) = 0$, f est affine donc nulle au voisinage de t_0 et on a le résultat.

On suppose $M(\alpha) \neq 0$. Si on a $t \in I(\alpha/2)$, le trinôme $f(t) + hf'(t) + h^2 \frac{M(\alpha)}{2}$ est positif pour $|h| < \frac{\alpha}{2}$. C'est un polynôme en h tendant vers l'infini de chaque coté, et sa dérivée s'annule en $\frac{-f'(t)}{M(\alpha)}$: c'est un minimum. Mais, par l'inégalité de la moyenne, $|f'(t)| \leq M(\alpha)|t - t_0|$ et le minimum appartient à $I(\alpha/2)$, donc est positif. Le trinôme ne s'annule pas, donc son discriminant est négatif et $f'(t)^2 \leq 2M(\alpha)f(t)$.

Comme f'' est continue, on a $M(\alpha) \to_{\alpha \to 0} 0$ et on conclut.

2 En dimension n

Soit $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}_+$ telle que $D\varphi(x) = D^2\varphi(x) = 0$ sur $\varphi^{-1}(0)$. Par le même argument que précédemment, on voit que $\sqrt{\varphi}$ est différentiable, de différentielle nulle sur $\varphi^{-1}(0)$ et il suffit de montrer que $\frac{D\varphi(x)}{2\sqrt{\varphi(x)}} \to_{x_0} 0$ (convergence dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$).

On pose $M(\alpha) = \max_{|x-x_0|\leq\alpha} |D^2 f(x)|$. Soit h un vecteur de norme 1. On définit $f : t \mapsto \varphi(x_0 + th)$, et $f''(t) \leq M(\alpha)$ si $t \in [-\alpha, \alpha]$, et on a $f'(t) = D\varphi(x_0 + th)(h)$ et $f''(t) = D^2\varphi(x_0 + th)(h, h)$. En utilisant le cas précédent , $\frac{D\varphi(x_0+th)(h)}{2\sqrt{\varphi(x_0+th)}} \leq \sqrt{\frac{M(\alpha)}{2}}$ pour t assez petit, soit $\frac{||D\varphi(x_0+th)||}{2\sqrt{\varphi(x_0+th)}} \leq \sqrt{\frac{M(\alpha)}{2}}$. Comme $D^2\varphi$ est continue, on a $M(\alpha) \to_{\alpha\to 0} 0$.