Transformée de Fourier discrète, transformée de Fourier rapide

Benjamin Hellouin

Cormen 30.1

La multiplication de polynômes A et B de degré n revient à calculer le produit de convolution des coefficients : $(a \otimes b)_{1 \le i \le n} = (\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k})_{1 \le i \le n}$, ce qui se fait naïvement en $O(n^2)$ opérations. Si au contraire on représente les poynômes comme des ensembles $\{(x_1, f(x_1)) \dots (x_{2n}, f(x_{2n}))\}$, la multiplication se fait en temps linéaire. Il faut cependant considérer le temps de passage d'une représentation à l'autre : l'évaluation et l'interpolation. Pour simplifier, on considère que A, B et $A \cdot B$ ont n coefficients en ajoutant des 0, et que n est une puissance de 2.

L'évaluation se fait en temps linéaire pour chaque point en utilisant la méthode de Horn : $A(x_i) = a_0 + a_1(x_i + a_2(x_i + \dots))$. L'évaluation sur n points se fait donc en temps $O(n^2)$: pas d'amélioration sur la méthode précédente. Cependant, on peut améliorer cette complexité en choisissant pour points x_k les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. On dit que le vecteur $y = (A(x_k))_{1 \le k \le n}$ est la *transformée de Fourier discrète* de $a = (a_k)$ et on note $y = TFD(a)$.

Pour calculer la transformée en temps sous-quadratique, on remarque que $A(x) = A_0(x^2) + x \cdot A_1(x^2)$ où on note

$$\begin{aligned} A_0(x) &= a_0 + a_2 x + \cdots + a_{2k} x^k + \dots && \text{(coefficients pairs)} \\ A_1(x) &= a_1 + a_3 x + \cdots + a_{2k+1} x^k + \dots && \text{(coefficients impairs)} \end{aligned}$$

qui sont de degré $n/2$. Il suffit donc d'évaluer les polynômes A_0 et A_1 en les points $e^{\frac{4ik\pi}{n}}$ et d'en déduire l'évaluation de A. Or il s'agit exactement des $n/2$-ièmes racines de l'unité, chacune présentée deux fois. Autrement dit, si on note $C(n)$ le coût d'évaluer un polynôme de degré n en les n racines n-ièmes de l'unité, on a $C(n) = 2C(n/2) + f(n)$ avec $f(n) = O(n)$ et $C(1) = O(1)$, soit

$$C(n) = \sum_{k=0}^{\log n} 2^k f(n/2^k) = O(n \log n).$$

Cette méthode s'appelle *transformée de Fourier rapide.*

Études à présent le problème inverse : à partir des (y_k), retrouver le vecteur (a_k) tel que $A(e^{\frac{2ik\pi}{n}}) = y_k$. On remarque que la transformée de Fourier discrète s'exprime sous la forme

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \dots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \dots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \dots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

avec $\omega_n = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. On remarque que cette matrice (que l'on note TFD) est inversible (matrice de Van der Monde, éléments distincts), et l'interpolation consiste donc à calculer $a = TFD^{-1}y$. Or $TFD^{-1} = \frac{1}{n}VDM(\omega_n^{-1})$: en effet, on a $(I_n)_{j,j'} = \sum_{k=0}^{n} \omega_n^{k(j-j')}/n = \sum_{k=0}^{n} \omega_n^{kj'}(\omega_n^{-kj}/n)$. Par conséquent, l'interpolation se fait en temps $O(n \log n)$ en utilisant l'algorithme précédent avec ω_n^{-1} et en divisant le résultat par n.