Universidad Andrés Bello

FMM235: Cálculo en Varias Variables

Guía 1

P1. Hallar los componentes del vector que tiene como puntos iniciales el vector $\vec{x}$ y como punto final el vector $\vec{y}$ si:

$$\vec{x} = (7,3,5)\,, \quad \vec{y} = (-8,4,2) \qquad\qquad \vec{x} = (6,1,3)\,, \quad \vec{y} = (4,0,-6)$$

$$\vec{x} = (1,1,1)\,, \quad \vec{y} = (-1,0,0) \qquad\qquad \vec{x} = (4,1,6)\,, \quad \vec{y} = (-3,0,2)$$

Haga los dibujos correspondientes.

P2. Determine la proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre $\vec{y}$ si:

$$\vec{x} = (7,3,5)\,, \quad \vec{y} = (-8,4,2) \qquad\qquad \vec{x} = (6,1,3)\,, \quad \vec{y} = (4,0,-6)$$

$$\vec{x} = (1,1,1)\,, \quad \vec{y} = (-1,0,0) \qquad\qquad \vec{x} = (4,1,6)\,, \quad \vec{y} = (-3,0,2).$$

Determine además el ángulo θ y el producto vectorial $\vec{x} \times \vec{y}$ que forman los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ anteriores.

Complete los dibujos del ejercicio anterior con las respuestas, y de una explicación geométrica de acuerdo a lo visto en clases.

P3. Encuentre escalares k_1, k_2 y k_3 tales que

$$k_1(1,2,3) + k_2(5,7,1) + k_3(6,9,-2) = (4,5,0).$$

Interprete este resultado usando sus conocimientos de álgebra lineal.

P4. Demuestre que si $\vec{x}$ es ortogonal a $\vec{y}$ y a $\vec{z}$, entonces $\vec{x}$ es ortogonal a $k_1\vec{y} + k_2\vec{z}$, para todo escalar (o real) k_1 y k_2.

P5. Sean $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ y $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$. Demuestre que:

$$\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

P6. Considere los siguientes puntos en $\mathbb{R}^3$:

- $\vec{x} = (1,1,1)$
- $\vec{y} = (1,1,-1)$
- $\vec{z} = (-1,1,1)$

a) Calcule el área del triangulo cuyos vértices son $\vec{x}, \vec{y}$ y $\vec{z}$.

b) Halle la ecuación del plano que contiene a $\vec{x}, \vec{y}$ y $\vec{z}$.

P7. Calcule el volumen del prisma en $\mathbb{R}^3$ cuyos vértices son los puntos

- $A = (0,0,0)$,
- $B = (1,0,0)$,
- $C = (2,2,0)$ y
- $D = (0,0,1)$.

P8. En cada uno de los casos siguientes, hallar un vector unitario que sea ortogonal tanto a $\vec{a}$ como a $\vec{b}$:

$$\vec{a} = (-7,2,5)\,, \quad \vec{b} = (-3,4,2) \qquad\qquad \vec{a} = (6,1,3)\,, \quad \vec{b} = (4,0,-6)$$

$$\vec{a} = (1,2,1)\,, \quad \vec{b} = (-1,7,5) \qquad\qquad \vec{a} = (4,1,6)\,, \quad \vec{b} = (-3,0,2).$$

P9. Si $\vec{x} = (1,2,3)$, $\vec{y} = (3,4,5)$ y $\vec{z} = (5,6,7)$, determine los siguientes vectores:

$$\vec{x} \times \vec{y},\ \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}),\ (\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z},\ (\vec{x} \times \vec{y}) \times (\vec{y} \times \vec{z}),\ \vec{x} \times (\vec{y} - 2\vec{z}),\ (\vec{x} \times \vec{y}) - 2\vec{z}.$$

P10. Hallar la ecuación (vectorial y cartesiana) de la recta que satisface:

a) Pasa por $(0,1,0)$ en la dirección $3\hat{\imath} + \hat{k}$.

b) Pasa por los puntos $(0,1,1)$ y $(0,2,3)$.

P11. Considere las siguientes rectas dadas en forma paramétrica en $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (2+4t, 8t+2, 40t),$$

$$\vec{x}(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s)) = (-5s, 6-2s, 10s+40).$$

a) Pruebe que las rectas se intersectan hallando el punto de intersección.

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

P12. Hallar la ecuación del plano que satisface:

a) Pasa por $(-1,1,3)$ y es perpendicular a $(-2,1,2)$.

b) Pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano

$$4x_1 - x_2 + x_3 = 0\ .$$

c) Pasa por el punto $(3,-1,2)$ y contiene a la recta

$$(2,-1,0) + t(2,3,0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

d) Es pararelo al plano $5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 10$ y pasa por el punto $(2,3,1)$.

e) Pasa por el punto $(8,4,5)$ y contiene a la recta

$$x_1 - 1 = x_2 - 2 = x_3 - 3\ .$$

f) Contiene tanto al punto $\vec{p} = (2,4,6)$ como a la recta

$$\{\ \vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (7-3t, 3+4t, 5+2t) \mid t \in \mathbb{R}\ \}.$$

g) Pasa por los puntos $a\hat{\imath}$, $a\hat{\jmath}$ y $a\hat{k}$, donde a es una contante real no nula.

P13. *a*) Encuentre la ecuación del plano $\mathcal{P}$ que contiene al origen y las proyecciones del punto $\vec{p} = (2, 3, 6)$ sobre los planos $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$.

b) Encuentre el ángulo que forma el plano $\mathcal{P}$ con el vector $\vec{p}$.

P14. Considere las siguientes rectas dadas en forma paramétrica en $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (1 + 2t, -2 - 3t, 5 + 4t),$$

$$\vec{x}(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s)) = (7 + 3s, 2 + 2s, 1 - 2s).$$

a) Pruebe que las rectas se intersectan hallando el punto de intersección.

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

P15. Considere las rectas siguientes:

$$\mathfrak{l}_1 = \{ (-1 - 4t, 4 + 4t, 7 + 8t) \mid t \in \mathbb{R} \} ,$$

$$\mathfrak{l}_2 = \{ (4 + 3s, 1 - s, 5 + 2s) \mid s \in \mathbb{R} \} .$$

a) (1 punto) Verifique que $\mathfrak{l}_1$ se intersecta con $\mathfrak{l}_2$.

b) (1 punto) Encuentre la ecuación cartesiana del plano que contiene a las rectas $\mathfrak{l}_1$ y $\mathfrak{l}_2$.

P16. Determine los valores de a y de b de manera que la recta

$$\frac{x_1 - b}{a} = \frac{x_2 - b + 1}{2a} = \frac{x_3 - 3b + 1}{2}$$

sea paralela al plano $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5$ y esté a distancia $\sqrt{2}$ del origen.

P17. Sean $\vec{x}$ e $\vec{y}$ dos vectores no colineales y distintos de $\vec{0}$ en $\mathbb{R}^3$. Pruebe que los siguientes vectores son ortogonales entre si:

- $\vec{x}$
- $\vec{x} \times \vec{y}$
- $\vec{y} - (\frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\|^2})\vec{x}$

P18. Utilizando la norma Euclideana, establezca las siguientes identidades, para $\vec{x}$ e $\vec{y}$ en $\mathbb{R}^n$:

a) $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2$.

b) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \frac{1}{4}\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \frac{1}{4}\|\vec{x} - \vec{y}\|^2$.

P19. Verifique las siguientes identidades, ojalá sin efectuar cálculos. Justifique su raciocinio:

a) $(\vec{x} + k\vec{y}) \times \vec{y} = \vec{x} \times \vec{y}$, donde k es un número real.

b) $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z})$.

P20. Usando la norma Euclideana, demuestre que en $\mathbb{R}^n$ se tiene lo siguiente:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \quad |(\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|)| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

P21. Para todo $\vec{x}$ e $\vec{y}$ en $\mathbb{R}^n$ sea $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x} \cdot \vec{y}$ el producto interno usual. Dada una matriz no singular P de $n \times n$ considere la función que a cada par de vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ en $\mathbb{R}^n$ asocia el valor $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_P := \langle P\vec{x}, P\vec{y} \rangle$.

a) Demuestre que la función $\langle\cdot,\cdot\rangle_P$ es un producto interno, luego induce una norma en $\mathbb{R}^n$, que denotamos por $\|\cdot\|_P$, así también una distancia. En particular, demuestre que los resultados de P10 y P12 también son válidos para $\|\cdot\|_P$.

b) Este producto interno permite definir el coseno de ángulos entre vectores de la manera siguiente:

$$\cos\theta_P(\vec{x},\vec{y}) := \frac{\langle\vec{x},\vec{y}\rangle_P}{\|\vec{x}\|_P\|\vec{y}\|_P}.$$

Siguiendo el ejercicio realizado por el Profesor Ayudante en clases, demuestre que el valor de $\cos\theta_P(\vec{x},\vec{y})$ está entre -1 y 1, al igual que para el producto interno usual de $\mathbb{R}^n$ (donde P es la identidad).

c) Usando b), introduzca la relación de ortogonalidad entre vectores, y repita P4.

d) Usando b), repita P2 usando las siguientes matrices P de 3×3:

$$P_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}, \; P_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{vmatrix}, \; P_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Compare los resultados de P8 con aquellos obtenidos usando P_3.

Sugerencia: Utilice el lenguaje matricial visto por el Profesor en clases.