Universidad Andrés Bello

FMM235: Cálculo en Varias Variables

Guía 3

P1. Considere funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y para ellas calcule su gradiente, encuentre todos sus puntos críticos, y diga si tales puntos críticos son máximos, mínimos o puntos de silla cuando los criterios vistos en clase lo permitan.

a) $f(\vec{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3ax_1x_2$, donde $a \in \mathbb{R}$.

b) $f(\vec{x}) = x_1^3 - 3x_1x_2^2 - 3x_1^2 - 3x_2^2 + 4$.

c) $f(\vec{x}) = (x_1 + x_2)^2 + x_1^4$.

d) $f(\vec{x}) = x_2^3 + 3x_1^2x_2 - 18x_1 - 30x_2$.

e) $f(\vec{x}) = (x_2 - x_1^2)(x_2 - 2x_1^2)$.

f) $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^4 - 2\|\vec{x}\|^2 - 2(x_1x_2)^2$.

g) $f(\vec{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 6x_1 - 3x_2$.

h) $f(\vec{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1 - 12x_2 + 20$.

i) $f(\vec{x}) = x_1^3 + x_2^2 - 3x_1$.

j) $f(\vec{x}) = 3x_1^3 + x_2^2 - 9x_1 - 6x_2 + 1$.

k) $f(\vec{x}) = \frac{x_1^4}{4} - \frac{x_2^3}{3} - \frac{x_1^2}{2} + x_2 + 1$.

l) $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)(x_1x_2 + 1)$.

m) $f(\vec{x}) = \sum_{i=0}^{n} \|\vec{x} - \vec{y}(i)\|^2$, donde $\{\vec{y}(i) | i \in \{1, ..., n\}\}$ es un conjunto de puntos dados en $\mathbb{R}^2$. De una interpretación geométrica de este ejercicio.

P2. Considere el plano en $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación es

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 .$$

Usando el criterio del Hessiano para máximos y mínimos, encuentre el punto en tal plano que minimiza la distancia al cuadrado desde el punto $\vec{p} = (1, 1, 1)$.

P3. Encuentre el punto en el plano $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$ que minimiza la distancia al cuadrado al punto $(1, 0, -2)$.

P4. Encuentre las distancia más corta del punto $(2, -2, 3)$ al plano

$$6x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 .$$

P5. Encuentre los puntos de la esfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$$

que están más cerca y más lejos del punto $(3, 1, -1)$.

P6. Considere la función $f(x_1, x_2) = x_1^5 - 40\, x_1x_2 + x_2^5$.

a) Encuentre los puntos críticos de $f(x_1, x_2)$, y clasifíquelos.

b) Use la parte anterior para obtener la desigualdad

$$x_1^5 - 40\, x_1 x_2 + x_2^5 + 96 \geq 0$$

cual sea (x_1, x_2) en $\mathbb{R}^2$.

P7. Sea
$$f(x_1, x_2, x_3) = x_3(x_1 - x_2)^5 + x_1\, x_2^2\, x_3^3.$$
Calcule la derivada direccional de f en la dirección de la normal unitaria a la esfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6$$

en el punto $p = (2, 1, -1)$.

P8. El punto $\vec{p} = (1, -1, 2)$ queda tanto en el paraboloide definido por la ecuación

$$x_3 = x_1^2 + x_2^2$$

como en el elipsoide dado por
$$2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 = 9\ .$$

a) Encuentre la ecuación de los planos tangentes a cada una de las superficies en el punto $\vec{p}$.

b) Escriba la ecuación de la recta de intersección de los 2 planos obtenidos en a).

c) Escriba la ecuación del plano que pasa por el punto $\vec{p}$ y que es normal a la recta obtenida en b).

P9. Considere el grafo de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$. Obtenga una expresión para el vector **unitario** normal al plano tangente a este grafo en todo punto del dominio de f, y luego escriba la ecuación del plano tangente al grafo en aquellos puntos si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es cualquiera de las funciones dadas en:

a) P1 de la Guía 2.

b) P1 de esta Guía.

P10. Al igual que en P9, considere el grafo de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$, y obtenga una expresión para el vector **unitario** normal al plano tangente a este grafo en todo punto del dominio de f, que denotamos por $\vec{n}$. Definimos un elemento vectorial infinitesimal asociado al grafo, a saber $d\vec{A} = \vec{n} dx_1 dx_2$. Calcule $\int_\Omega \vec{F} \cdot d\vec{A}$ si el campo $\vec{F}$ está dado por $\vec{F}(\vec{x}) = (1, 1, 1)$, Ω es la región en $\mathbb{R}^2$ definida según $\{\ \vec{x} = (x_1, x_2) \mid \|\vec{x}\| \leq R\ \}$, mientras que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es cualquiera de las funciones dadas en:

a) P1 de la Guía 2.

b) P1 de esta Guía.

P11. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(\vec{x}) = ax_1^2x_2 + bx_1x_2^2 + \frac{1}{2}a^2x_2^2 + 2x_2.$$

a) Calculando el gradiente de f halle los valores posibles de a y b para que $(1, 1)$ sea un punto crítico de f.

b) Calculando el Hessiano de f verifique para cuales valores de a y b se tiene que $(1, 1)$ es un punto de silla de f.

P12. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(\vec{x}) = ax_1^2x_2 + bx_1x_2^2.$$

Hallar el valor de a y b de manera que la derivada direccional de $f(\vec{x})$ en el punto $(1, 1)$ tenga un valor máximo igual a 8 en la dirección del vector que forma un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ con el eje x_1.

P13. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(\vec{x}) = x_1^4 + x_2^4 + 4x_1x_2 + 1\ .$$

a) Halle todos los puntos críticos de f. Usando el criterio del Hessiano visto en clases, diga cuales de ellos son máximo, mínimo o punto de silla.

b) Encuentre la normal al grafo de f para todo (x_1, x_2) en $\mathbb{R}^2$.

c) Halle la ecuación del plano tangente y la rectal normal al grafo de f en $\mathbb{R}^3$ en el punto $(1, -1, -1)$.

P14. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(\vec{x}) = a\, x_1^2\, x_2 + b\, x_1\, x_2^2 + \frac{a^2\, x_2^2}{2} + 2\, x_2\ .$$

a) Encuentre los valores de a y b para que la función tenga un punto de silla cuando $(x_1, x_2) = (1, 1)$.

b) Para alguno de los valores de a y b obtenidos en la parte anterior, encuentre la ecuación del plano tangente al grafo de f en el punto $(2, 2, f(2, 2))$.

P15. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(\vec{x}) = x_1^3 + x_2^2 - x_1^2x_2 - x_1x_2\ .$$

a) Halle la normal al grafo de f en todo punto.

b) Halle la ecuación del plano tangente en el punto $(1, 1, 0)$.

c) Halle todos los puntos críticos, y diga si estos son máximos, mínimos o puntos de silla.

P16. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(\vec{x}) = x_1^3 + x_2^2 - x_1^2x_2 - x_1x_2.$$

a) (1 punto) Encuentre los puntos críticos de $f(\vec{x})$, y diga de que tipo es cada uno de ellos.

b) (1 punto) Encuentre las ecuciones del plano tangente y la recta normal al grafo de f en el punto $(1, 2, 1)$.

P17. Suponga $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(\vec{x}) = \cos(x_1 x_2) + x_1 x_2$.

Determine:

a) La normal al grafo de f dentro de $\mathbb{R}^3$.

b) Los puntos de $\mathbb{R}^2$ para los cuales el plano tangente al grafo de f es paralelo al hiperplano $x_3 + x_2 = 1$ en $\mathbb{R}^3$.

P18. Obtener la ecuación del plano tangente a la superficie descrita por la ecuación

$$x_3 = x_1^2 + x_1 x_2$$

que además es normal a los planos

$$x_1 + x_2 - x_3 = 3$$

y

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 4\ .$$

P19. Una lata cilíndrica debe tener un volumen de $0{,}25\, m^3$. Encuentre la altura h y el radio r de la lata que minimizará el área de la superficie de la lata. ¿Cuál es la relación entre las resultantes r y h?

P20. Hallar la mínima distancia entre $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ y el punto $(5, -3, 6)$.

P21. Un avión consume combustible según la función $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 x_3^2$. El avión se mueve sobre la esfera terrestre asociada a la ecuación $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$ ($R >$ radio de la tierra). Determinar el máximo consumo de combustible posible.

P22. De un cartón de $12\, m^2$ se va a construir una caja sin tapa. Encuentre el máximo volumen de la caja.

P23. Encuentre los valores extremos de $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$ en el círculo $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

P24. Encuentre el máximo valor de la función $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$ en la curva de intersección del plano $x_1 - x_2 + x_3 = 1$ y el cilindro $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

P25. Encuentre el volumen máximo de una caja rectangular cuya superficie tiene un área de $1500\, cm^2$, y para la cual la longitud total de sus aristas es $200\, cm$.

P26. Considere funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Para ellas defina el subconjunto $\Omega(f, R_1, R_2)$ de $\mathbb{R}^2$ según

$$\Omega(f, R_1, R_2) := Dom(f) \cap \{\ \vec{x} \mid R_1 \le \|\vec{x}\| \le R_2\ \},$$

donde R_1 y R_2 son números reales positivos, con $R_1 \le R_2$. Obtenga expresiones para

$$\int_{\Omega(f, R_1, R_2)} f(\vec{x}) dx_1 dx_2,$$

y diga que restricciones deben satisfacer R_1 y R_2 en los siguientes casos:

a) $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^k$ para $k \in \{1, 2, 3\}$.

b) $f(\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x}\|^k}$ para $k \in \{1, 2, 3\}$. Comente para que valores de k hay problemas cuando $R_1 \to 0$.

c) $f(\vec{x}) = A - \|\vec{x}\|^k$ para $k \in \{1, 2, 3\}$, donde A es un número real.

d) $f(\vec{x}) = B - \frac{1}{\|\vec{x}\|^k}$ para $k \in \{1, 2, 3\}$, donde B es un número real. Comente para que valores de k hay problemas cuando $R_1 \to 0$.

e) $f(\vec{x}) = \log\|\vec{x}\|$.

f) $f(\vec{x}) = e^{-\|\vec{x}\|^2}$ (este ejercicio presenta mayor dificultad).

P27. Para todas las funciones dadas en P26 obtenga expresiones para

$$\int_{\Omega(\|\vec{\nabla} f(\vec{x})\|, R_1, R_2)} \|\vec{\nabla} f(\vec{x})\|^2 dx_1 dx_2,$$

con $\Omega(h, R_1, R_2)$ definido en P26 para todo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

P28. Al igual que en P27, obtenga expresiones para

$$\int_{\Omega(\|\vec{\nabla} \log f(\vec{x})\|, R_1, R_2)} \|\vec{\nabla} \log f(\vec{x})\|^2 dx_1 dx_2,$$

donde f es una de las funciones dadas en P26.

Sugerencia: Para P26-P27-P28 use coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$.

P29. Calcule las integrales del tipo $\int_\Omega f(\vec{x}) dx_1 dx_2$, donde f y Ω varían de un ejercicio a otro.

a) $f(\vec{x}) = 1 + 2(x_1 + x_2),\ \Omega = \{x_1 \in [0, 1], x_2 \in [0, 2]\}$.

b) $f(\vec{x}) = 4 - x_1^2 - 2x_2^2,\ \Omega = \{x_1 \in [0, 1], x_2 \in [0, 1]\}$.

c) $f(\vec{x}) = x_1 x_2$, con Ω el rectángulo con vértices (0,0), (0,5), (3,5), (3,0).

d) $f(\vec{x}) = \operatorname{sen}(x_1)\operatorname{sen}(x_2)$, con Ω el rectángulo con vértices $(-\pi, 0)$, $(\pi, 0)$, $(\pi, \frac{\pi}{2})$, $(-\pi, \frac{\pi}{2})$.

e) $f(\vec{x}) = x_1^2 x_2^2,\ \Omega = \{x_1 \in [x_2, \sqrt{x_2}], x_2 \in [0, 1]\}$.

f) $f(\vec{x}) = x_1 + x_2,\ \Omega = \{x_1 \in [-a, a], x_2 \in [-\sqrt{a^2 - x_1^2}, \sqrt{a^2 - x_1^2}]\}$.

g) $f(\vec{x}) = x_2/(x_1^2 + x_2^2)$, con Ω el triángulo limitado por $x_2 = x_1$, $x_2 = 2x_1$, $x_1 = 2$.

h) $f(\vec{x}) = x_1$, con Ω el sector de un círculo en el primer cuadrante limitado por $x_2 = \sqrt{25 - x_1^2}$, $3x_1 - 4x_2 = 0$, $x_2 = 0$.

i) $f(\vec{x}) = x_1 + x_2$ con $\Omega = \{\ x_1 \in [-a, a]\ ,\ x_2 \in [-\sqrt{a^2 - x_1^2}, \sqrt{a^2 - x_1^2}]\ \}$.

P30. Calcule la siguiente integral a través de un cambio adecuado de variables:

$$\iint_\Omega (x_1 - x_2)^2 \operatorname{sen}^2(x_1 + x_2) dx_1 dx_2\ ,$$

donde Ω es el paralelógramo de vértices $(\pi, 0), (2\pi, \pi), (\pi, 2\pi)$ y $(0, \pi)$.

P31. Una integral doble de una función se reduce a la integral iterada

$$\int_0^3 \int_{\frac{4y}{3}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dxdy \ .$$

Determine la región de integración e invierta el orden de integración.

P32. Calcule

$$\iint_D \cos((x-2y)^2)dA \ ,$$

donde D es la región limitada por las rectas $x+2y=0, x-2y=1$ e $y=0$.

P33. Se define el valor medio de $f(\vec{x})$ en la región Ω de acuerdo a la expresión

$$\frac{\int_\Omega f(\vec{x})dx_1dx_2}{\int_\Omega dx_1dx_2}.$$

Calcule tal valor medio para las funciones y dominios dados en P26, P27, P28 y P29.

P34. Repita P26, P27, P28 y P33 para $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en vez de $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ usando coordenadas esféricas.

P35. Escriba y resuelva la integral

$$\iiint_\Omega x_3^2 dx_1dx_2dx_3 \ ,$$

donde Ω es la región encerrada por la esfera de radio 2 y sobre el cono cuyos puntos satisfacen la ecuación

$$x_3 = \sqrt{3x_1^2+3x_2^2} \ ,$$

usando los siguientes sistemas coordenados:

- Coordenadas rectangulares.
- Coordenadas cilíndricas.
- Coordenadas esféricas.

P36. Calcule el volumen de la región del cilindro $x_1^2+x_2^2=Rx_2$ que está contenida en la esfera $x_1^2+x_2^2+x_3^2=R^2$.

Sugerencia: Use coordenadas cilíndricas.

P37. Calcule el volumen de la región en $\mathbb{R}^3$ que consiste en la intersección de las siguientes regiones sólidas:

- La esfera limitada por

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=4 \ .$$

- El cilindro limitado por

$$x_1^2+x_2^2-2x_2=0 \ .$$

P38. Calcule el volumen de la región de $\mathbb{R}^3$ limitada por las superficies cilíndricas

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

y

$$x_2^2 + x_3^2 = 1 \ .$$

P39. Calcule la integral $\iiint_\Omega x_3 dx_1 dx_2 dx_3$ donde Ω es la parte común de las siguientes esferas:

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$,

b) $x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2 \leq 1$.

Sugerencia: Use coordenadas cilíndricas.

P40. Calcule el volumen del cuerpo sólido acotado por:

- El cilindro sólido $x_1^2 + x_2^2 = 1$,
- El cono $x_1^2 + x_2^2 = (x_3 - 6)^2$,
- El plano $x_3 = 0$.

P41. Calcule el volumen del sólido en $\mathbb{R}^3$ limitado por las siguientes superficies, y con $x_3 \geq 1$:

a) El cono

$$x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + 1 \ .$$

b) El paraboloide

$$x_3 = 5 - x_1^2 - x_2^2 \ .$$

P42. Calcule el volumen de la región del paraboloide $x_1^2 + x_2^2 = x_3$ que está contenida en la esfera de radio R centrada en el origen.

Sugerencia: Use coordenadas cilíndricas.

P43. Calcule el volumen de la región descrita por:

- $x_1^2 + x_2^2 + x_3 \leq 25$.
- $x_1^2 + x_2^2 \geq 1$.
- $x_2 \geq x_1$.
- $x_2 \leq \sqrt{3} x_1$.
- $x_3 \geq 0$.

Sugerencia: Use coordenadas cilíndricas.

P44. Considere la región Ω en $\mathbb{R}^3$ entre las esferas $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ y $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$, que se encuentra sobre el cono $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$.

a) Encuentre el volumen de tal región Ω.

b) Encuentre el centro de masa de tal región si su densidad es constante.

Sugerencia: Use coordenadas esféricas.

P45. *a*) Calcule el centro de masa del cuerpo comprendido entre las superficies $x_1^2 + x_2^2 + x_3 = 3$ y $x_3 = 1 - x_1^2 - x_2^2$, cuya densidad es constante.

b) Calcule la integral
$$\iiint_V x_1 e^{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2}\, dx_1 dx_2 dx_3\ ,$$
donde V es la región comprendida entre las esferas de radio 1 y radio 2 centradas en el origen.

P46. *a*) Calcule el volumen de la región piramidal comprendida entre los planos $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ y
$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} = 1.$$

b) Encuentre el centro de masa de tal región.

Sugerencia: Revise los apuntes de clases.

P47. Hallar el centro de masa de la lámina triangular cuyos vértices son $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$, y cuya densidad es
$$\sigma(x_1, x_2) = x_1^2 x_2\ .$$

P48. Calcule
$$\iint_\Omega (x_2 - 2x_1^2)\, dx_1 dx_2\ ,$$
donde Ω es la región acotada por la curva descrita por la ecuación
$$|x_1| + |x_2| = 2\ .$$

P49. Calcule
$$\iint\limits_\Omega \exp\left(\frac{x_1 - 2x_2}{x_1 + 2x_2}\right) dx_1 dx_2,$$
donde Ω es el triángulo de vértices $A = (0,0)$, $B = (2,0)$ y $C = (0,1)$.

Indicación: Utilice el cambio de variables $u = x_1 - 2x_2$; $v = x_1 + 2x_2$.

P50. Calcule
$$\iiint\limits_\Omega x_1 x_2 x_3 (x_1^4 - x_2^4)\, dx_1 dx_2 dx_3$$
donde
$$\Omega = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le x_1^2 - x_2^2 \le 2,\ 3 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4,\ 0 \le x_3 \le 1,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\,\}.$$

Indicación: Utilice el cambio de variables $u = x_1 - x_2^2$; $v = x_1^2 + x_2^2$.

P51. Evaluar
$$\int_0^b \int_0^a \exp(\text{máx}\{a^2 x_1^2, b^2 x_2^2\})\, dx_1 dx_2$$
donde a y b son números positivos.

P52. Considere el cambio de coordenadas tridimensional de manera que
$$x_1 = a\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, x_2 = b\rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, x_3 = c\rho\cos\phi,$$
donde a, b y c son números reales positivos, (x_1, x_2, x_3) son las coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^3$ y (ρ, ϕ, θ) son las coordenadas esféricas usuales.

a) Calcule el cambio infinitesimal de volumen que induce ese cambio, o sea encuentre el factor $\mathcal{J}(\frac{x_1,x_2,x_3}{\rho,\phi,\theta})$ de manera que

$$dx_1 dx_2 dx_3 = \mathcal{J}(\frac{x_1,x_2,x_3}{\rho,\phi,\theta}) d\rho d\phi d\theta .$$

b) Utilizando ese cambio de coordenadas calcule el volumen del elipsoide cuya frontera está dada por

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = R^2 .$$

c) Usando las nuevas coordenadas calcule el centro de masa de la región de tal elipsoide en el primer octante, o sea donde todas las coordenadas cartesianas son positivas.

Sugerencia: Revise los apuntes de clases y compare con las coordenadas esféricas, es decir el caso en que $a = b = c = 1$.

P53. Hallar el centro de masa de la región sobre la superficie

$$x_3 = \sqrt{3x_1^2 + 3x_2^3}$$

y dentro de la superficie

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2ax_3 ,$$

donde a es un número real positivo.

P54. Considere la siguiente integral:

$$\iiint_\Omega x_3^2 \, dx_1 dx_2 dx_3 ,$$

donde Ω es la región encerrada por la esfera de radio 2 y sobre el cono cuyos puntos satisfacen la ecuación

$$x_3 = \sqrt{3x_1^2 + 3x_2^2} .$$

a) Plantee la integral con los límites adecuados usando:

1) Coordenadas cilíndricas.
2) Coordenadas esféricas.

b) Resuelva la integral **solamente en uno** de los dos sistemas de coordenadas anteriores.

P55. Encuentre el volumen y el centro de masa del sólido limitado por el paraboloide

$$x_3 = b(x_1^2 + x_2^2) ,$$

con $b > 0$, y el plano

$$x_3 = h ,$$

donde $h > 0$. Suponga que la densidad del sólido es constante.

P56. Considere el campo vectorial $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$. Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie esférica

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

con $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$.

P57. Encontrar el centro de masas de la región con densidad constante que podemos describir como sigue:

- Está acotada inferiormente por el cono $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$.
- Está acotada superiormente por la esfera $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

Sugerencia: Escoja un sistema de coordenadas adecuado.

P58. Encuentre el centro de masa del sólido V limitado por la superficie

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^3 = 0 ,$$

que se encuentra entre los planos $x_3 = 0$ y $x_3 = 1$, y cuya función de densidad es

$$\rho(x_1, x_2, x_3) = 1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} .$$

P59. Considere una lámina semicircular de radio R en el plano x_1/x_2, que obtenemos de eliminar la parte inferior de un círculo del mismo radio centrado en el origen. Si la densidad en cada punto de esta lámina es proporcional a su distancia al origen, encuentre el centro de masa de esta lámina.

P60. Considere una lámina en el plano x_1/x_2 dentro del círculo $x_1^2 + x_2^2 = 2x_2$ pero fuera del círculo $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Si la densidad $\rho(x_1, x_2)$ en cada punto de esta lámina es inversamente proporcional a su distancia al origen, es decir

$$\rho(x_1, x_2) = \frac{k}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} ,$$

donde k es un número positvo, encuentre la masa de esta lámina.

P61. Considere la región $\Omega(R_1, R_2)$ en $\mathbb{R}^n$ dada por $\{\vec{x} \mid R_1 \leq \|\vec{x}\| \leq R_2\}$ y las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ dadas en a), b) y e) de $P26$. Usando tales definiciones se pide lo siguiente:

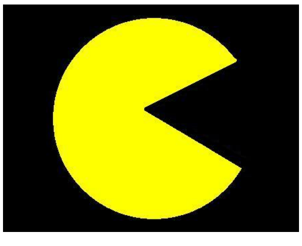
a) Para $n = 2$ calcular el centro de masa del cuerpo en la región de $\Omega(R_1, R_2)$ contenida en el semiplano superior (o sea donde x_2 es positivo) y cuya densidad está dada por f.

b) Para $n = 2$ calcular el centro de masa del cuerpo en la región de $\Omega(R_1, R_2)$ contenida en el primer cuadrante (o sea donde x_1 y x_2 son positivos) y cuya densidad está dada por f.

c) Para $n = 3$ calcular el centro de masa del cuerpo en la región de $\Omega(R_1, R_2)$ contenida en el semiespacio superior (o sea donde x_3 es positivo) y cuya densidad está dada por f.

d) Para $n = 3$ calcular el centro de masa del cuerpo en la región de $\Omega(R_1, R_2)$ contenida en el primer octante (o sea donde x_1, x_2 y x_3 son positivos) y cuya densidad está dada por f.

P62. Considere la región Pac-Man que aparece en la siguiente figura.



Esta región está acotada por el par de líneas rectas $x_2 = kx_1, x_2 = -kx_1$ cuando x_1 es mayor que cero, y por la circunsferencia de radio R centrada en el origen. Si la densidad es uniforme, encuentre el centro de masas de tal región.

P63. Encuentre el centro de masas de la región con forma de boomerang entre las siguientes parábolas $x_2^2 = -4(x_1 - 1)$ y $x_2^2 = -2(x_1 - 2)$ en el plano.

P64. Considere integrales del tipo $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{x}$, donde Γ es una curva suave contenida en una región simplemente conexa de $\mathbb{R}^3$. Diga si $\vec{F}$ se puede considerar como un campo de fuerza conservativo, y si es así, encuentre el potencial que le genera en los siguientes casos:

a) $\vec{F}(\vec{x}) = (-x_2, x_1, 0)$.

b) $\vec{F}(\vec{x}) = (x_2 x_3, x_3 x_1, x_1 x_2)$.

c) $\vec{F}(\vec{x}) = (x_2 \operatorname{sen} x_3, x_1 \operatorname{sen} x_3, x_1 x_2 \cos x_3)$.

d) $\vec{F}(\vec{x}) = (e^{x_1} \cos x_2, -e^{x_1} \operatorname{sen} x_2, x_3)$.

e) $\vec{F}(\vec{x}) = e^{x_2 + 2x_3}(1, x_1, 2x_1)$.

P65. Sólo para los campos de fuerza conservativos dados en P63 evalúe la integral $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{x}$ a lo largo de la curva asociada a la trayectoria dada por $\Gamma = \{(\, g(t)\cos t \, , \, g(t) \operatorname{sen} t \, , \, h(t) \,) \mid t \in [0, 2\pi] \, \}$, donde g y h son funciones suaves de t.

P66. Para todos los campos de fuerza $\vec{F}$ dados en P63 evalúe $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{x}$ a lo largo de la trayectoria $\Gamma = \{(t, t, t) | t \in [0, \pi/2]\}$.

P67. Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x_1, x_2) = (\, \frac{x_1 + x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2 - x_1}{x_1^2 + x_2^2} \,).$$

a) Calcule la integral de línea $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{x}$, donde Γ es la siguiente trayectoria:
- La curva $\vec{x}(t) = (1 + t^2, 1 + t^4)$, donde $0 \leq t \leq 1$.
- La circunsferencia de radio R y centro en el origen, recorrida en el sentido inverso al de las agujas del reloj.

b) Verifique si el campo $\vec{F}$ es o no conservativo.

P68. Sea Γ la curva parametrizada según

$$\Gamma = \{ \, (t, \operatorname{sen} t, t^2 \cos t) \mid 0 \leq t \leq \pi \, \} \, .$$

Si $f(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 e^{x_1 + 2x_2}$ y $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ calcule el trabajo hecho por la fuerza $\vec{F}$ a lo largo de la curva Γ, es decir

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{x} \, .$$

P69. Sea Γ la curva que consiste en la intersección del plano $x_3 = ax_1 + bx_2$ con el cilindro $x_1^2 + x_2^2 = 1$, que parametrizamos de la siguiente manera:

$$\Gamma = \{ \ (\ \cos t \ , \ \operatorname{sen} t \ , \ a\cos t + b \operatorname{sen} t \ ) \mid t \in [0, 2\pi] \ \}.$$

Considere el campo $\vec{F}(\vec{x}) = (\ x_2 \ , \ x_3 - x_1 \ , \ -x_2 \ )$.

a) Encontrar el valor de a y b en $\mathbb{R}$ tal que $a^2 + b^2 = 1$ y $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0$.

b) ¿ Podemos concluir de a) que $\vec{F}$ es un campo conservativo ? Justifique su respuesta.

P70. Considere la integral

$$I = \int_\Gamma \frac{dx_1}{x_2} + (\frac{1}{x_3} - \frac{x_1}{x_2^2})dx_2 - \frac{x_2}{x_3^2}dx_3 \ ,$$

donde Γ es una curva que une los puntos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en el primer octante.

a) Pruebe que la integral es independiente de la curva Γ que une a $\vec{A}$ con $\vec{B}$.

b) Visualize la integral anterior como el trabajo hecho por un campo de fuerzas $\vec{F}$ a lo largo de la trayectoria Γ. Usando lo probado en el item anterior halle un potencial ϕ para el campo $\vec{F}$, y luego evalue I entre los puntos $\vec{A} = (1, 1, 1)$ y $\vec{B} = (2, 2, 2)$.

P71. Considere la integral

$$I = \int_\Gamma \frac{x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2 + 3x_3 dx_3}{1 + x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2} \ ,$$

si Γ es la curva descrita como sigue:

a) La forma paramétrica de Γ es $\{ \ \vec{r}(t) \mid t \in [0, 1] \ \}$.

b) Γ está dada por la intersección del cilindro $x_1^2 + x_2^2 = a^2$ con el cono $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ recorrida en el sentido **horario** comenzando desde el punto de la curva Γ que intersecta al eje x_1 positivo.

P72. Calcule la integral

$$\iiint_\Omega x_3 dx_1 dx_2 dx_3$$

donde Ω es la parte común de las siguientes esferas:

- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$,
- $x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2 \leq 1$.

P73. Calcule la integral

$$I = \int_\Gamma \{ \ (\ e^{x_1} \cos x_2 + x_2 x_3 \ )dx_1 + (\ x_1 x_3 - e^{x_1} \operatorname{sen} x_2 \ )dx_2 + (\ x_1 x_2 + x_3 \ )dx_3 \ \} \ ,$$

donde Γ es la curva en $\mathbb{R}^3$ descrita por

$$\{ \ \vec{x}(t) = (\ \cos t \ , \ \operatorname{sen} t \ , \ t \ ) \mid t \in [0, 2\pi] \ \} \ .$$

P74. Calcule la integral

$$I = \int_\Gamma \{ \, (\, x_1^2 - x_2^2 \,) dx_1 + (\, x_1^2 - 4 \,) dx_2 \, \} \, ,$$

donde Γ es la frontera de la región acotada por las curvas

$$x_1^2 - x_2^2 = 1 \, , \; x_1^2 - x_2^2 = 9 \, , \; x_1 + x_2 = 4 \text{ y } x_1 + x_2 = 6$$

recorrida en el sentido anti-horario.

Indicación: Considere el cambio de variables $u = x_1 + x_2, v = x_1 - x_2$.

P75. Encuentre el área de la región plana Ω en $\mathbb{R}^2$ limitada por las curvas

$$x_2 = x_1^2 \, , \; x_1^2 + x_2^2 = 2x_2 \, , \; x_2 = -\sqrt{3}x_1 \, ,$$

y que contiene al punto $(0, 1)$.

P76. Considere el campo $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$\vec{F}(x_1, x_2) = (\, x_1 + 4x_2 \, , \; ax_1 + x_2 \,).$$

a) Encontrar el valor de a para que el campo $\vec{F}$ sea conservativo.

b) Calcular $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{x}$, donde Γ es el arco de la parábola $x_2 = x_1^2$ que va desde el punto $(0, 0)$ hacia el punto $(1, 1)$.

P77. Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (\, e^{x_2+2x_3} \, , \; x_1 e^{x_2+2x_3} \, , \; 2x_1 e^{x_2+2x_3} \,) \, .$$

Calcule

$$I = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{x} \, ,$$

donde

a) $\Gamma = \{ \, \vec{r}(t) = (t, t^2, t^3) \mid t \in [0, 1] \, \}$.

b) Γ es la curva de intersección entre las superficies dadas por

$$x_3 = x_1^2 + x_2^2 \qquad \text{y} \qquad x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 \, .$$

P78. Obtenga el valor de $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{x}$ si

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (\, 2x_1x_2 + x_3^2 \cos x_1 \, , \; x_1^2 - 2x_2x_3^3 \, , \; 2x_3 \operatorname{sen} x_1 - 3x_2^2x_3^2 + 4x_3 \,) \, ,$$

en los siguientes casos:

- Γ es la curva dada por el trazo rectilíneo que une el punto $A = (0, 0, 0)$ con $B = (\frac{\pi}{2}, 2, 3)$.
- Γ es la curva de intersección de las superficies $x_1^2 + x_2^2 = 4$ y $x_3 = 8 - x_1^2 - x_2^2$, recorrida en el sentido anti-horario.

P79. Calcule la integral $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{x}$ si

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (\ x_2x_3\ ,\ x_1x_3\ ,\ x_1x_2\ )\ ,$$

con Γ siendo:

a) La hélice descrita en forma paramétrica por $\{\ \vec{x}(t) = (\ a\cos t\ ,\ a\sin t\ ,\ kt\ ) \mid t \in [0, 2\pi]\ \}$, donde a y k son constantes positivas.

b) La curva obtenida al intersectar la esfera de radio a centrada en el origen con el plano $x_2 + x_3 = a$, donde a es una constante mayor que cero.

P80. Considere el campo de fuerzas

$$\vec{F}(x_1, x_2) = (\ 3x_1^2 + x_2\ ,\ e^{x_2} + x_1\ )\ .$$

a) ¿ Es este campo conservativo ? Si lo es, encuentre un potencial.

b) Calcule el trabajo hecho por este campo de fuerzas a lo largo de la curva Γ parametrizada según

$$\Gamma = \{\ \vec{x}(t) = (\ e^{4t^2}\ ,\ \log 8t + \pi\ ) \mid t \in [1, 2]\ \}.$$

P81. Evalue la integral $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{x}$ donde $\vec{F}(\vec{x}) = \|\vec{x}\|\vec{x}$, con $\vec{x} = (\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ )$, en los siguientes casos:

a) $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, con Γ_1 el trazo rectilíneo que une $(1, 0, 0)$ con $(1, 1, 0)$, y Γ_2 el trazo rectilíneo que une $(1, 1, 0)$ con $(1, 1, 1)$.

b) Γ es la intersección de las superficies $x_3 = x_1^2 + x_2^2$ con $x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$, recorrida en el sentido anti-horario.

P82. Sea $P(x_1, x_2) = 5x_1^4\, x_2 + x_1^2\, x_2^3$.

a) Obtenga una función $Q(x_1, x_2)$ de modo que el campo

$$\vec{F}(x_1, x_2) = (\ P(x_1, x_2)\ ,\ Q(x_1, x_2)\ )$$

sea conservativo.

b) Utilice la parte a) para calcular $\int_\Gamma P(x_1, x_2) dx_1$ si Γ es la circunsferencia de radio 2 centrada en el origen, y recorrida en el sentido anti-horario.

P83. Sean ϕ, ψ y θ funciones reales diferenciables. Considere el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (\ x_3\phi(x_2)\ ,\ 2x_3\psi(x_2)\ ,\ \theta(x_1) + x_2^2\ ).$$

a) Encuentre las funciones ϕ, ψ y θ de modo que $\vec{F}$ sea un campo conservativo.

b) Para las funciones encontradas en a) determine la función potencial de $\vec{F}$, es decir la función f tal que $\vec{F} = \vec{\nabla} f$.

c) Encontrar la integral de linea de $\vec{F}$ a lo largo del camino

$$\vec{r}(t) = (\ \mathrm{sen}(t)\ ,\ t\ \log(t+1)\ ,\ t - t^3\ )$$

con $t \in [0, 1]$.

P84. Encuentre los valores de α y β para que la integral

$$\int_\Gamma \{(\ 2x_1\ x_2\ x_3^\alpha + x_1^2\ )\ dx_1 + (\ x_1^2\ x_3^3\ )\ dx_2 + (\ \beta x_1^2\ x_2\ x_3^2\ )\ dx_3\}$$

sea independiente de la trayectoria Γ entre 2 puntos fijos en $\mathbb{R}^3$. Para dichos valores de α y β, evalue la integral si Γ es la línea recta que parte en $A = (2, 0, \sqrt{11})$ y termina en $B = (1, \sqrt{7}, 0)$.