Universidad Andrés Bello

FMM235: Cálculo en Varias Variables

Guía 5

P1. Utilizando la identidad de Stokes en $\mathbb{R}^3$ calcule

$$\int_\Omega (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{A},$$

donde:

a) Ω es el manto cilíndrico

$$\{ \ \vec{x} \mid x_1^2 + x_2^2 = R^2, x_3 \in [a,b] \ \},$$

$\vec{F}(\vec{x})$ satisface la relación

$$\vec{F}(x_1,x_2,x_3) = \phi(x_3) \ \vec{F}(x_1,x_2,0)$$

donde $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función acotada con $\phi(0) = 1$, mientras que $\vec{F}(x_1,x_2,0)$ está dada por:

1) $\vec{F}(x_1,x_2,0) = (-x_2, x_1, 0)/2$.
2) $\vec{F}(x_1,x_2,0) = (-x_2^2, x_1^2, 0)$.
3) $\vec{F}(x_1,x_2,0) = (-x_2^3, x_1^3, 0)$.
4) $\vec{F}(x_1,x_2,0) = (-x_2^k, x_1^k, 0)$ donde k es un número par.

b) Ω es la parte del elipsoide

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$$

donde x_3 es mayor o igual a cero, mientras que $\vec{F}(\vec{x})$ es cualquiera de los campos dados en a).

c) Ω es la superficie obtenida al rotar en torno al eje x_3 el círculo de radio R_1 contenido en el plano $\{x_1 = 0\}$ cuyo centro está en el eje x_2 a distancia R_2 del origen, con $0 < R_1 < R_2$, mientras que

$$\vec{F}(\vec{x}) = (\log\|\vec{x}\|, e^{\|\vec{x}\|}, \|\vec{x}\|^{\|\vec{x}\|}).$$

d) Ω es la parte del plano $x_1+x_2+x_3 = 1$ en el primer octante cuya frontera está orientada en el sentido antihorario, mientras que

$$\vec{F}(x_1,x_2,x_3) = (\ x_1 x_3 e^{x_2} \ , \ -x_1 x_3 e^{x_2} \ , \ x_3 \ ).$$

e) Ω es la parte del paraboloide $2x_1 = x_2^2 + x_3^2$ que se encuentra entre $x_1 = 0$ y $x_1 = 2$, mientras que

$$\vec{F}(x_1,x_2,x_3) = (x_2 x_1^2, -x_1 x_3, 3x_2).$$

P2. Considere la región V en $\mathbb{R}^3$ limitada por los cilindros

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$

y

$$x_1^2 + x_2^2 = 4 \; ,$$

y por los planos $x_3 = 0$ y $x_3 = 4$.

Calcule

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

si

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (\; x_1^2 x_2 x_3 \; , \; x_1 x_2^2 x_3 \; , \; x_1 x_2 x_3^2 \;) \; .$$

P3. Verifique la identidad de Stokes

$$\int_{\Omega} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{A} = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

para el campo vectorial

$$\vec{F}(\vec{x}) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2) \; ,$$

donde Ω es la parte del paraboloide $x_3 = 1 - x_1^2 - x_2^2$ que está arriba del plano $x_3 = 0$, y dotada con la orientación habitual.

P4. Verifique el Teorema de Stokes para

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (\; -x_2^3 \; , \; x_1^3 \; , \; x_3^3 \;),$$

donde S es la porción del plano $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ al interior del cilindro $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

P5. Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(\vec{x}) = (\; 3x_1 \; , \; -2x_2 \; , \; 5x_3 \;) \; .$$

Verifique el Teorema de la divergencia (o de Gauss) para el campo $\vec{F}$ si el sólido involucrado es la esfersa de radio 5 centrada en el origen.

P6. Verifique el Teorema de Stokes para el campo vectorial

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (\; -5x_2 \; , \; 5x_1 \; , \; x_3 \;)$$

y la superficie Ω dada por la parte del plano $x_3 = 1$ encerrada por la superficie

$$x_3 = 5 - x_1^2 - x_2^2 \; .$$

P7. Calcule ambos lados de la identidad de Stokes con

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (\; x_1, \; x_1 + x_2 \; , \; x_1 + x_2 + x_3 \;) \; ,$$

donde Ω es la parte del plano $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ encerrada por el cilindro $x_1^2 + x_2^2 = R^2$.

P8. Mediante la identidad de Stokes resolver la integral de línea

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

si $\vec{F}$ es el campo vectorial

$$\vec{F}(\vec{x}) = (\ x_3 + x_2 x_3\ ,\ x_1 + x_1 x_3\ ,\ x_2 + x_1 x_2\ )\ ,$$

y Γ es el triángulo cuyos vértices son $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$, recorrido en el sentido anti-horario.

P9. Calcule, usando el Teorema de Stokes, la integral curvilínea

$$I = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{x},$$

donde

a) $\vec{F}$ es el campo vectorial

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1^3 - 3x_2^2, x_3^2 + x_2, x_1^2 + 2x_3^2)$$

y Γ es la curva que se obtiene de la intersección del plano $x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$ con el cilindro $x_1^2 + x_2^2 = 9$ recorrida en el sentido antihorario.

b) $\vec{F}$ es el campo vectorial

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 x_3, x_1^2 x_2^2, x_3^2)$$

y Γ es la curva que se obtiene de la intersección del plano $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ con el cilindro $x_1^2 + x_2^2 = 9$ recorrida en el sentido antihorario.

P10. Usando el Teorema de Stokes calcule la integral

$$\int_\Gamma (\ x_2 dx_1 + x_3 dx_2 + x_1 dx_3\ )\ ,$$

donde Γ es la curva de intersección entre la esfera de radio A centrada en el origen y el plano

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0\ ,$$

tal curva recorrida en el sentido anti-horario.

P11. Considere la superficie parabólica Ω dada por $x_3 = 1 - x_1^2 - x_2^2$, con $x_3 \geq 0$, y el campo vectorial

$$\vec{F}(\vec{x}) = (\ x_3 - x_1 x_2\ ,\ x_2 - x_3\ ,\ x_1^3 + x_2\ )\ .$$

Aplicando el Teorema de Stokes calcule la integral

$$\iint_\Omega (\ \vec{\nabla} \times \vec{F}\ ) \cdot \hat{n} dS\ .$$

P12. Calcule $\iint_\Omega \vec{F} \cdot \hat{n} dS$ si

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_3, x_2 x_3, x_3^2) \ ,$$

donde Ω es la superficie que encierra al volumen acotado superiormente por el paraboloide

$$x_3 = 6 - x_1^2 - x_2^2 \ ,$$

e inferiormente por el cono

$$x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 \ ,$$

con $x_3 \geq 0$.

P13. Calcule

$$\iint_\Omega (\ \vec{\nabla} \times \vec{F} \ ) \cdot d\vec{S} \ ,$$

donde $\vec{F}$ es el campo vectorial dado por

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (\ x_2 \ , \ -x_1 \ , \ x_1^2 \ ) \ ,$$

y Ω es la superficie definida por

$$x_3 = x_1^2 + x_2^2$$

entre $x_3 = 0$ y $x_3 = 4$.

P14. Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F}(\vec{x}) = (\ x_1 \ , \ x_2^2 \ , x_3 \ )$ a través de la superficie del sólido

$$x_1^2 + x_2^2 \leq R^2$$

con $0 \leq x_3 \leq 1$.

P15. Considere la región V en $\mathbb{R}^3$ limitada por el cilindro parabólico

$$x_3 = 4 - x_2^2$$

y los planos

$$x_1 = 0 \ , \ x_1 = 1 \text{ y } x_3 = 0 \ .$$

Calcule

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

si

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (\ x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ ) \ .$$

P16. Considere la superficie parabólica Ω dada por $x_3 = 1 - x_1^2 - x_2^2$, con $x_3 \geq 0$, y el campo vectorial

$$\vec{F}(\vec{x}) = (\ x_3 - x_1 x_2 \ , \ x_2 - x_3 \ , \ x_1^3 + x_2 \ ) \ .$$

Aplicando el Teorema de Stokes calcule la integral

$$\iint_\Omega (\ \vec{\nabla} \times \vec{F} \ ) \cdot \hat{n} dS \ .$$

P17. Calcule el flujo del campo vectorial $\vec{F}(\vec{x}) = (\ x_1\ ,\ x_2^2\ , x_3\ )$ a través de la superficie del sólido

$$x_1^2 + x_2^2 \leq R^2$$

con $0 \leq x_3 \leq 1$.

P18. Considere la región V en $\mathbb{R}^3$ con $x_3 \geq 0$ limitada por la esfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 8$$

y el cono

$$x_3^2 = x_1^2 + x_2^2\ .$$

Calcule $\int_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ si $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{x}$.

P19. Sea V la región en $\mathbb{R}^3$ limitada por la esfera de radio $2\sqrt{2}$ centrada en el origen y el cono

$$x_2^2 = x_1^2 + x_3^2\ ,$$

con $x_2 \geq 0$. Calcule

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

si $\vec{F} = (x_1, x_2, x_3)$.

P20. Determinar el flujo de $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 x_2)$ a través de la superficie definida por el paraboloide

$$x_2 = x_1^2 + x_3^2$$

y el plano

$$x_2 = 4\ .$$

P21. Calcule la integral $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$ si

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (\ 3x_1\ , 3x_2\ ,\ x_3\ ),$$

donde S es la superficie

$$x_3 = 9 - x_1^2 - x_2^2 \ \text{ con } \ x_3 \geq 0$$

de las siguientes maneras:

a) De manera directa.

b) Usando el Teorema de Gauss.

P22. Calcule el flujo hacia el exterior de la región encerrada por el paraboloide

$$x_3 = x_1^2 + x_2^2$$

y el plano

$$x_3 = 1$$

del campo vectorial

$$\vec{F}(\vec{x}) = (\ x_1, x_2, x_3\ )$$

de 2 maneras diferentes:

a) De manera directa.

b) Usando el Teorema de la divergencia o Gauss.

P23. Considere el campo vectorial $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$, y la superficie $\mathcal{S}$ que es la frontera de la región sólida limitada por el paraboloide $x_3 = 1 - x_1^2 - x_2^2$ y el plano $x_3 = 0$. Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de $\mathcal{S}$ de la manera siguiente:

a) Según la definición.

b) Usando el Teorema de la divergencia.

P24. Utilice el teorema de la divergencia para evaluar

$$\iint\limits_{\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$$

donde $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (\ x_3^2 x_1, \frac{1}{3}x_2^3 + \tan(x_3)\, , x_1^2 x_3 + x_2^2\ )$, mientras que Ω es el hemisferio superior de la esfera $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, junto con el círculo $x_1^2 + x_2^2 = 1$ con $x_3 = 0$.

P25. Sea V la región en $\mathbb{R}^3$ limitada por la esfera de radio $2\sqrt{2}$ centrada en el origen y el cono

$$x_2^2 = x_1^2 + x_3^2\ ,$$

con $x_2 \geq 0$. Calcule

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

si $\vec{F} = (x_1, x_2, x_3)$.

P26. Hallar el flujo del campo vectorial

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (\ x_2^2 + x_1\ ,\ e^{x_3}\ ,\ \arctan(x_1) + x_3\ )$$

a través de la superficie S, donde S es la frontera de la regón sólida limitada por la esfera

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2$$

y el paraboloide

$$x_1^2 + x_2^2 = x_3\ ,$$

en la dirección de la normal exterior.

P27. Considere el campo vectorial $\vec{F}(\vec{x}) = (x_1, x_2, x_3)$. Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie $\Omega = \partial V$ que encierra al sólido limitado por:

- El paraboloide $x_3 = x_1^2 + x_2^2$ y
- El plano $x_3 = 1$.

P28. Por intermedio de la identidad de la divergencia (o de Gauss) en $\mathbb{R}^3$ calcule el flujo hacia el exterior del campo $\vec{F}$ a través de la frontera ∂V de la región V si:

a) $\vec{F}(\vec{x}) = (x_2 - x_1, x_3 - x_2, x_2 - x_3)$ con V el cubo limitado por los planos

$$\{x_1 = 1\}, \{x_1 = -1\}, \{x_2 = 1\}, \{x_2 = -1\}, \{x_3 = 1\} \text{ y } \{x_3 = -1\}.$$

b) $\vec{F}(\vec{x}) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2)$ con V el cubo del primer octante cortado por los planos

$$\{x_1 = 1\}, \{x_2 = 1\} \text{ y } \{x_3 = 1\}.$$

c) $\vec{F}(\vec{x}) = (x_1^3, x_2^3, x_3^3)$ con V la bola de radio R centrada en el origen.

d) $\vec{F}(\vec{x}) = (x_1, x_2, 0)$ con V el cilindro sólido dado por

$$\{\ \vec{x} \mid x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, a \leq x_3 \leq b\ \}.$$

e) $\vec{F}(\vec{x}) = (x_1^3, x_2^3, x_3 + (1 - x_1^2 - x_2^2)(1 - x_3^2)\ )$ con V el cilindro sólido dado por

$$\{\ \vec{x} \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\ , x_3^2 \leq 1\ \}.$$

P29. Tomando en cuenta la identidad de Gauss en $\mathbb{R}^3$ calcule la integral

$$\int_{V(R_1,R_2)} (div \cdot \vec{F})\ dx_1 dx_2 dx_3$$

si $V(R_1, R_2)$ es la región $\{\ \vec{x} \mid\ \ R_1 \leq \|\vec{x}\| \leq R_2\ \}$, donde $0 \leq R_1 < R_2$ son tales que la integral está definida para $\vec{F}$ dada por:

a) $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{x} f(\vec{x})$, si $f(\vec{x})$ es igual a:

1) $f(\vec{x}) = \|x\|^k$ para $k \in \{1, 2, 3\}$.
2) $f(\vec{x}) = \frac{1}{\|x\|^k}$ para $k \in \{1, 2, 3\}$.
3) $f(\vec{x}) = e^{\|x\|^k}$ para $k \in \{1, 2, 3\}$.
4) $f(\vec{x}) = e^{-\|x\|^k}$ para $k \in \{1, 2, 3\}$.
5) $f(\vec{x}) = \sqrt{1 - \|x\|^k}$ para $k \in \{1, 2, 3\}$.
6) $f(\vec{x}) = \log \sqrt{1 - \|x\|^k}$ para $k \in \{1, 2, 3\}$.
7) $f(\vec{x}) = \log \log \|\vec{x}\|$.

b) $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{\nabla} f(\vec{x})$, donde $f(\vec{x})$ es cualquiera de las funciones dadas en la parte a).

c) $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \log f(\vec{x})$, donde $f(\vec{x})$ es cualquiera de las funciones dadas en la parte a).

P30. Considere el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2, x_2^2, x_2 x_3).$$

a) Usando el Teorema de la divergencia calcule el flujo del campo $\vec{F}$ a través de la superficie S, es decir

$$\int\int_{\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n}\ dS,$$

donde $\Omega = \partial V$ encierra a la región V limitada por los planos

$$x_1 = 0, x_3 = 0 \text{ y } x_1 + x_2 + x_3 = 4.$$

b) Calcule la integral de línea $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{x}$, donde Γ es el triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C de intersección del plano $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ con los ejes x_1, x_2 y x_3, respectivamente.