Pauta del examen.

P1.- Sea $\mathcal{P}$ el plano tangente a la superficie $z = 2x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 4y$ en el punto $(1,-1,-1)$.

a) Encuentre la ecuación del plano $\mathcal{P}$.

b) Encuentre todos los puntos de la superficie $z = -x^2 + 4xy - 6y^2$ en los cuales el plano tangente es parallelo al plano $\mathcal{P}$.

R1.- a) La superficie es la curva de nivel 0 de la foncion $f(x,y,z) = 2x^2+2xy+y^2-6x-4y-z$, es decir los puntos donde $f(x,y,z) = 0$. Por lo tanto el vector normal a la superficie en $(1,-1,-1)$ es el vector gradiente de f en$(1,-1,-1)$.

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x+2y-6 \\ 2y+2x-4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{n} = \vec{\nabla} f(1,-1,-1) = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y el plano $\mathcal{P}$ pasa por $(1,-1,-1)$. Por lo tanto la ecuación del plano es

$$< \vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} >= 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4x - 4y - z = 1.$$

b) Sea (a,b,c) un punto de la superficie dada, es decir que tenemos $c = -a^2 + 4ab - 6b^2$. Esa superficie es la curva de nivel 0 de la foncion $g(x,y,z) = -x^2 + 4xy - 6y^2 - z$. Como anteriormente el vector normal a la superficie en (a,b,c) es el vector gradiente de g.

$$\vec{\nabla} g(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2x+4y \\ -12y+4x \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{n} = \vec{\nabla} f(a,b,c) = \begin{pmatrix} -2a+4b \\ -12b+4a \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ese plano es parallelo a $\mathcal{P}$ cuando los vectores normales son colineares, es decir cuando existe un α tal que $\begin{pmatrix} -2a+4b \\ -12b+4a \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$. Obtenemos tres ecuaciones :

$$\begin{matrix} -2a+4b = -4\alpha \\ -12b+4a = -4\alpha \\ \alpha = 1 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} \alpha = 1 \\ -4b = -12 \\ -12b+4a = -4 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} \alpha = 1 \\ b = 3 \\ a = 8 \end{matrix}.$$

Y como (a,b,c) pertenece a la superficie, tenemos que $c = -a^2 + 4bc - 6b^2 = -22$. Por lo tanto hay un unico punto en que el plano tangente es parallelo a $\mathcal{P}$ y ese punto es $(8,3,-22)$.

P2.- Encuentre los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 + y^2,$$

y diga si son máximos, mínimos, o puntos de silla.

R2.- Los puntos críticos son los puntos donde el gradiente se cancela, es decir que :

$$\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} 4x^3 - 2x = 0 \\ 4y^3 + 2y = 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} x = 0 \text{ o } 4x^2 - 2 = 0 \\ y = 0 \text{ o } 4y^2 + 2 = 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} x = 0 \text{ o } x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \\ y = 0 \end{array}$$

En la ultima etapa podemos ver que $4y^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = -\frac{1}{2}$ no tiene soluciones reales. Por los tantos obtenemos tres puntos críticos : $(0,0)$, $(\sqrt{1/2}, 0)$ y $(-\sqrt{1/2}, 0)$.
Ahora calulemos la Hessiana de f.

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 + 2 \end{pmatrix}.$$

Punto $(0,0)$ La Hessiana vale $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Sus valores propias son las soluciones de la ecuación

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-2-\lambda)(2-\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm 2.$$

Como hay dos soluciones de seño differente, $(0,0)$ es un punto de silla.

Punto $(\sqrt{1/2}, 0)$ La Hessiana vale $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Sus valores propias son las soluciones de la ecuación

$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (4-\lambda)(2-\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2 \text{ o } \lambda = 4.$$

Como hay dos soluciones positivas, $(\sqrt{1/2}, 0)$ es un mínimo local.

Punto $(-\sqrt{1/2}, 0)$ La Hessiana vale $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Es la misma Hessiana que para el punto anterior, así que la ecuación es la misma, y el punto es tambien un minímo local.

P3.- Sea Ω la región del primer cuadrante limitada por las rectas $x_1 + x_2 = 4$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y el arco correspondiente del círculo $x_1^2 + x_2^2 = 1$ en el primer cuadrante. Calcule

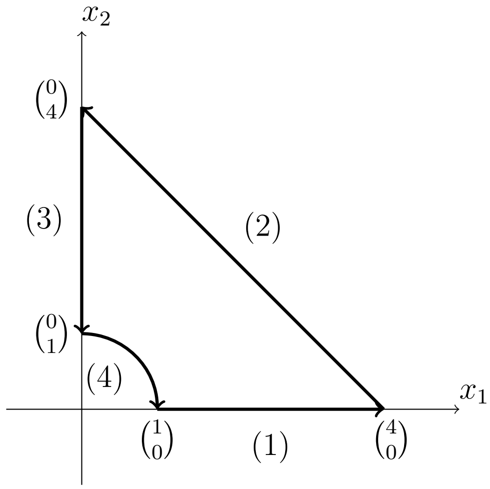
$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

para el campo vectorial

$$\vec{F}(x_1, x_2) = (-x_1 x_2, x_1 x_2),$$

donde $\partial\Omega$ es la frontera de la región Ω orientada en el sentido anti-horario.

R3.-Primero hagamos un dibujo.
Podemos verificar que el campo no es conservativo y tenemos que calcular. Podemos calcular esta integral directamente o con el teorema de Green. Aquí lo vamos a hacer directamente.
La integral de linea tiene cuatro partes (1), (2), (3), (4).



(1) es el segmento de recta que une $(0,1)$ a $(0,4)$. Por lo tanto lo podemos parametrizar como $\vec{x}(t) = (0,1) + t(0,3) = (0, 1+3t)$ con $t : 0 \to 1$ (t va desde el punto inicial al punto final). El vector velocidad es $\vec{v} = (0,3)$ y tenemos :

$$\int_{(1)} \begin{pmatrix} -x_1x_2 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} d\vec{x} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} dt = 0.$$

(2) es el segmento de recta que une $(0,4)$ a $(4,0)$. Lo parametrizamos como $\vec{x}(t) = (0,4) + t(4,-4) = (4t, 4-4t)$ con $t : 0 \to 1$. El vector velocidad es $\vec{v} = (4,-4)$ y tenemos :

$$\begin{aligned} \int_{(2)} \begin{pmatrix} -x_1x_2 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} d\vec{x} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} -4t(4-4t) \\ 4t(4-4t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} dt. \\ &= 16 \int_0^1 4t - 4t^2 + 4t - 4t^2 dt \\ &= 128 \int_0^1 t - t^2 dt = 128 \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{128}{6} = \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

(3) es el segmento de recta que une $(4,0)$ a $(1,0)$. Por lo tanto lo podemos parametrizar como $\vec{x}(t) = (4,0) + t(3,0) = (4-3t, 0)$ con $t : 1 \to 0$ (t va desde el punto inicial al punto final). El vector velocidad es $\vec{v} = (3,0)$ y tenemos :

$$\int_{(3)} \begin{pmatrix} -x_1x_2 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} d\vec{x} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} dt = 0.$$

(4) es la sección del circúlo de radio 1 que va desde $(0,1)$ hasta $(1,0)$ con angúlo decreciendo (ver dibujo). Lo vamos a parametrizar con polares :

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r \operatorname{sen}\theta \end{aligned} \qquad \text{con} \qquad r = 1$$

(ya que es la ecuación del circúlo). Así obtenemos $\vec{x}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ y el vector velocidad es $\vec{v} = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$. El angúlo que coresponde al punto inicial $(0,1)$ es :

$$\begin{matrix} \cos t = 0 \\ \operatorname{sen} t = 1 \end{matrix} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

El angúlo que corresponde al punto final $(1,0)$ es :

$$\begin{matrix} \cos t = 1 \\ \operatorname{sen} t = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow t = 0.$$

(Podría ser 2π pero vemos en el dibujo que el angúlo decrece). Podemos calcular la integral :

$$\begin{aligned} \int_{(4)} \begin{pmatrix} -x_1x_2 \\ x_1x_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} d\vec{x} &= \int_{\pi/2}^{0} \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \cos t \\ \operatorname{sen} t \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_{\pi/2}^{0} \operatorname{sen}^2 t \cos t + \operatorname{sen} t \cos^2 t dt. \end{aligned}$$

La primera parte se puede calcular con el cambio $u = \operatorname{sen} t$, $du = \cos t dt$:

$$\int_{\pi/2}^{0} \operatorname{sen}^2 t \cos t dt = \int_{1}^{0} u^2 du = -\frac{1}{3}.$$

y la segunda parte con $u = \cos t$ daba tambien $-\frac{1}{3}$ para un total de $-\frac{2}{3}$.
Al final la ecuación total es :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{x} &= \int_{(1)} \vec{F} \cdot d\vec{x} + \int_{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{x} + \int_{(3)} \vec{F} \cdot d\vec{x} + \int_{(4)} \vec{F} \cdot d\vec{x} \\ &= 0 + \frac{64}{3} + 0 - \frac{2}{3} = \frac{62}{3}. \end{aligned}$$