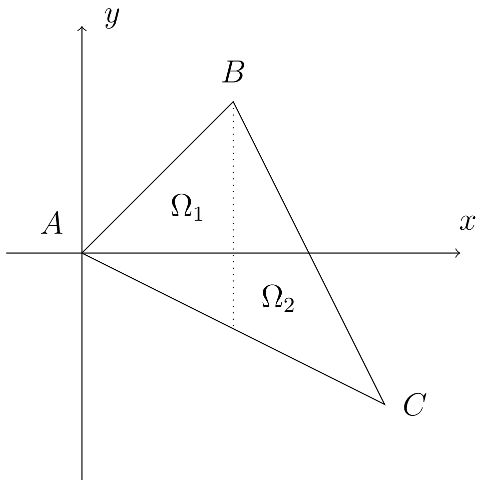
Universidad Andrés Bello.
FMM235 : Cálculo en varias variables.

Pauta del control 2.

P1.- Sea Ω el triangulo entre los puntos $(0,0),(1,1)$ y $(2,-1)$. Calcula la integral :

$$\iint_{\Omega}(x+2y)dxdy.$$

R1.- Primero hagamos un dibujo de Ω.



donde $A=(0,0)$, $B=(1,1)$ y $C=(2,-1)$. La recta entre A y B tiene ecuación $x-y=0$; la entre B y C tiene ecuación $2x+y=3$; la entre C y A, $x+2y=0$. Vamos a ocupar la tecnica de variables libre-dependientes.

Tomando x como variable libre, las cotas de x son $0\leqslant x\leqslant 2$. Pero podemos ver en el dibujo que la cota superior de y va cambiar segun que $x\leqslant 1$ o $x\geqslant 1$ (la recta cambia). Por lo tanto, vamos a cortar Ω en dos triangulos Ω_1,Ω_2 como en el dibujo.

Ω_1 se puede describir en variables libre-dependientes así :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant & x \leqslant 1 \\ -\frac{x}{2} \leqslant & y \leqslant x \end{aligned}$$

Las cotas de y se obtienen porque el y minimo es en la recta entre A y C donde se cumple $x+2y=0$ y el y maximo es en la recta entre A y B donde se cumple $x-y=0$. Integrando en Ω_1 obtenemos :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_1}(x+2y)dxdy &= \int_0^1\int_{-\frac{x}{2}}^{x}(x+2y)dydx \\ &= \int_0^1 \left[xy+y^2\right]_{-\frac{x}{2}}^{x} dx \\ &= \int_0^1 x^2+\frac{x^2}{2}+x^2-\frac{x^2}{4}dx \\ &= \int_0^1 \frac{9}{4}x^2dx = \left[\frac{9}{4}\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Ahora hagamos lo mismo en Ω_2 :

$$\begin{aligned} 1 \leqslant & x \leqslant 2 \\ -\frac{x}{2} \leqslant & y \leqslant 3-2x \end{aligned}$$

Integrando en Ω_2 obtenemos :

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega_2} (x+2y)dxdy &= \int_1^2 \int_{-\frac{x}{2}}^{3-2x} (x+2y)dydx \\
&= \int_1^2 \left[xy+y^2\right]_{-\frac{x}{2}}^{3-2x} dx \\
&= \int_1^2 x(3-2x) + \frac{x^2}{2} + (3-2x)^2 - \frac{x^2}{4} dx \\
&= \int_1^2 9+3x-12x-2x^2+\frac{x^2}{2}+4x^2-\frac{x^2}{4} dx \\
&= \int_1^2 9-9x+\frac{9}{4}x^2 dx \\
&= \left[9x-9\frac{x^2}{2}+\frac{9}{4}\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = (18-9)-\frac{9}{2}(4-1)+\frac{9}{12}(8-1) = 9-\frac{27}{2}+\frac{21}{4} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

En total obtenemos :

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} (x+2y)dxdy &= \iint_{\Omega_1} (x+2y)dxdy + \iint_{\Omega_2} (x+2y)dxdy \\
&= \frac{3}{4}+\frac{3}{4} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$