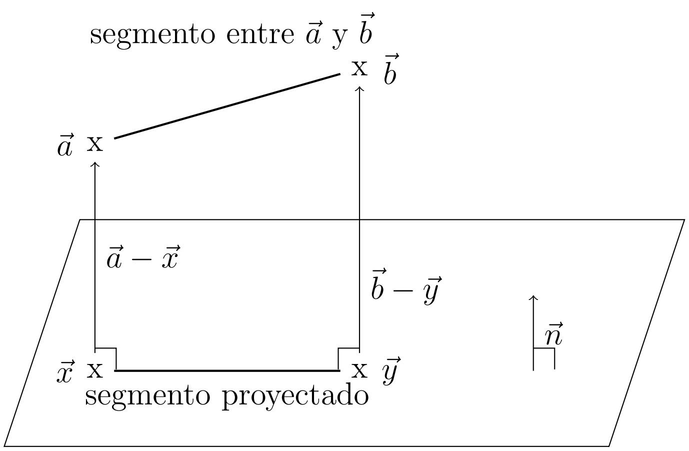
Coreccíon del solemne 1.

P1.- Sea $\mathfrak{P}$ el plano en $\mathbb{R}^3$ dado por la ecuacíon

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Considere el segmento de recta entre los puntos $\vec{a} = (5, 5, 0)$ y $\vec{b} = (5, 5, 3)$. Encuentre el largo de la proyeccíon de tal segmento sobre el plano $\mathfrak{P}$.

R1.- Si $\vec{x}$ es la proyeccíon de $\vec{a}$ en el plano y que $\vec{y}$ es la proyeccíon de $\vec{b}$ en el plano, entonces el largo de la proyeccíon es la distancia entre $\vec{x}$ y $\vec{y}$ (ver dibujo).



Metodo directo : Primero calculemos las proyecciones $\vec{x}$ y $\vec{y}$. Hay varíos métodos para calcular la proyeccíon de un punto sobre un plan, aqui es una.

Dado que $\vec{x}$ es la proyeccíon de $\vec{a}$ sobre el plano, se obtiene que $\vec{a}-\vec{x}$ es ortogonal al plano, de lo que se deduce que $\vec{a}-\vec{x}$ es colineal al vector normal del plano $\vec{n}$, es decir que $\vec{a}-\vec{x} = \alpha\vec{n}$. De la ecuacíon del plano se deduce que $\vec{n} = (1, 1, 1)$.
$\vec{a}$ no pertenece al plano pero $\vec{x}$ sí, dado que es la proyeccíon sobre el plano. Entonces $\vec{x}$ cumple la ecuacíon del plano. Como $\vec{x} = \vec{a} - \alpha\vec{n}$, obtenemos :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ (a_1 - \alpha n_1) + (a_2 - \alpha n_2) + (a_3 - \alpha n_3) &= 1 \end{aligned}$$

de lo que se deduce que $\alpha = 3$. Entonces $\vec{x} = \vec{a} - 3\vec{n} = (2, 2, -3)$. Con la misma tecnica se deduce que $\vec{b} - \vec{y} = \beta\vec{n}$ con $\beta = 4$ y luego $\vec{y} = (1, 1, -1)$.

Ahora el largo de la proyeccíon del segmento es simplemente la longitud del vector entre las dos proyecciones, es decir, $||\vec{y} - \vec{x}|| = ||(-1, -1, 2)|| = \sqrt{6}$.

Otro método : El largo del segmento de $\vec{a}$ a $\vec{b}$ es $||\vec{b}-\vec{a}||$. Uno puede ver en el dibujo que la longitud de la proyeccíon es $||\vec{b}-\vec{a}||\cos\theta$, donde θ es el angúlo que hace el vector con el plano. Para calcular un angúlo θ entre un vector y un plano, hay que calcular el angúlo φ con su vector normal y tomar $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$. En ese caso obtenemos : $\cos\theta=\cos\frac{\pi}{2}-\theta=\operatorname{sen}\varphi$. Como φ es el angúlo entre $\vec{b}-\vec{a}$ y el vector normal $\vec{n}$, se obtiene que :

$$\begin{aligned}||\vec{b}-\vec{a}||\cos\theta &= ||\vec{b}-\vec{a}||\operatorname{sen}\varphi\\ &= ||\vec{b}-\vec{a}||\cdot\frac{||(\vec{b}-\vec{a})\times\vec{n}||}{||\vec{b}-\vec{a}||\cdot||\vec{n}||}\\ &= \frac{||(\vec{b}-\vec{a})\times\vec{n}||}{||\vec{n}||}\end{aligned}$$

y el cálculo da $\sqrt{6}$.

P2.- Considere una función differenciable $f(x,y)$. Sea $g\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por

$$g(s,t)=f(e^s\cos t, e^s\operatorname{sen}t).$$

Pruebe que

$$e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2\right]=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

R2.- Cuidado de no confundir $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ con $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2$.

Gracias a la regla de la cadena, obtenemos que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\\ &= e^s\cos t\frac{\partial f}{\partial x}+e^s\operatorname{sen}t\frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

porque $\frac{\partial g}{\partial x}$ es simplemente la derivacíon de f en respeto a su primera variable. De forma similar :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\\ &= -e^s\operatorname{sen}t\frac{\partial f}{\partial x}+e^s\cos t\frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

De eso resulta que :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)^2 &= \left(e^s\cos t\frac{\partial f}{\partial x}+e^s\operatorname{sen}t\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(-e^s\operatorname{sen}t\frac{\partial f}{\partial x}+e^s\cos t\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\\ &= e^{2s}\cos^2 t\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+2e^s\cos t\frac{\partial f}{\partial x}e^s\operatorname{sen}t\frac{\partial f}{\partial y}+e^{2s}\operatorname{sen}^2 t\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\\ &\quad+e^{2s}\operatorname{sen}^2 t\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2-2e^s\operatorname{sen}t\frac{\partial f}{\partial x}e^s\cos t\frac{\partial f}{\partial y}+e^{2s}\cos^2 t\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\\ &= e^{2s}(\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+e^{2s}(\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\\ &= e^{2s}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\end{aligned}$$

que es el resultado buscado.

P3.- Considere la función $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 x_2 + 4$.
— Encuentre los puntos críticos de $f(x_1, x_2)$ y clasifíquelos.
— Encuentre la normal al plano tangente del grafo de f en el punto $(0, 0, f(0, 0))$.

R3.- Un punto crítico es un punto donde el gradiente de f se cancela.

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = (2x_1 + 2x_1 x_2,\ 2x_2 + x_1^2).$$

Así tenemos que resolver la ecuacíon :

$$\begin{cases} 2x_1(1 + x_2) & = 0 \\ 2x_2 + x_1^2 & = 0 \end{cases}$$

La primera ecuacíon se cumple en dos casos : si $x_1 = 0$, o si $x_2 = -1$. Si $x_1 = 0$, de la segunda ecuacíon se deduce que $x_2 = 0$ y tenemos un primer punto crítico $(0, 0)$. Si $x_2 = -1$, de la segunda ecuacíon se deduce que $x_1^2 = 2$, y tenemos dos puntos críticos : $(\sqrt{2}, -1)$ y $(-\sqrt{2}, -1)$.

La hessiana de f vale :

$$\mathrm{Hess}(f) = \begin{pmatrix} 2 + 2x_2 & 2x_1 \\ 2x_1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Primer punto : $(0, 0)$ En $(0, 0)$, la hessiana vale $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Para encontrar sus valores propios, tenemos que resolver la ecuacíon $\det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = 0$, es decir $(2 - \lambda)^2 = 0$. Pero $(2 - \lambda)^2 = 0$ si y solo si $\lambda = 2$. Todos los valores propios son positivos, y por eso $(0, 0)$ es un mínimo local.

Segundo punto : $(\sqrt{2}, -1)$ En ese punto, la hessiana vale $\begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ y la ecuacíon es $(-\lambda)(2 - \lambda) - 8 = 0$, que se simplifica en $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$.

Es una ecuacíon del segundo grado cuyo discriminante es $\Delta = 4 - 4 \times (-8) = 36$. Entonces la ecuacíon admite dos soluciones que son :

$$\lambda_1 = \frac{2 + \sqrt{36}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{2 - \sqrt{36}}{2}$$

Dado que $\sqrt{36} = 6 > 2$, tenemos $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$. $(\sqrt{2}, -1)$ es un punto silla.

Tercer punto : $(-\sqrt{2}, -1)$ En ese punto, la hessiana vale $\begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$ y la ecuacíon es $(-\lambda)(2 - \lambda) - 8 = 0$. Podemos ver que la ecuacíon es la misma que para el segundo punto, así que la soluciones son las mismas, y deducemos que $(-\sqrt{2}, -1)$ es tambíen un punto silla.

Plano tangente en $(0, 0, f(0, 0))$ Intuitivamenta, dado que $(0, 0)$ es un mínimo de f, el plano tangente al grafo en ese punto es horizontal y su vector normal es en la direccíon des eje $\vec{k}$, es decir, $\vec{n} = (0, 0, 1)$. Eso se puede verificar con calcúlo.

Lo que sabemos hacer es encontrar normales a curvas de nivel. El grafo de f es por definicíon la curva $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$, es decir que es descrita por la ecuacíon $x_3 = f(x_1, x_2)$. Esa ecuacíon se puede escribir como $x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_1^2 x_2 - 4 = 0$. Así el grafo de f es la curva de nivel de la funcíon $g(x_1, x_2, x_3) = x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_1^2 x_2 - 4$. El gradiente de esa funcíon es $\nabla g(\vec{x}) = (-2x_1 - 2x_1 x_2,\ -2x_2 - x_1^2,\ 1)$. Para obtener el vector normal al plano tangente en $(0, 0, f(0, 0)) = (0, 0, 4)$, se evalua el gradiente en ese punto y obtenemos $\nabla g(0, 0, 4) = (0, 0, 1)$. Se puede calcular así el plano tangente pero no es requerido por la pregunta.