Universidad Andrés Bello

FMM235: Cálculo en Varias Variables

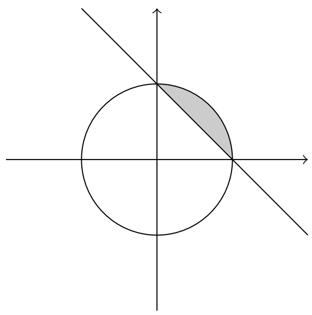
Solemne 2, Segundo Semestre del 2015

P1.- (2 puntos) Calcule

$$\iint_\Omega y \; dx \; dy$$

donde $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : x^2 + y^2 \ \leq 1 \ , \ x + y \geq 1 \ \}$.

R1.- Primero hagamos un dibujo.



La región de integración es contenida adentro del circúlo de centro $\binom{0}{0}$ y de radio 1, y arriba de la recta de ecuación $x + y = 1$. Podemos ver que los dos puntos de encuentro del circúlo y de la recta son $\binom{1}{0}$ y $\binom{0}{1}$, y la región es la parte gris del dibujo.

Ahora podemos describir esa región por variables libres-dependientes. Por ejemplo, tomando x libre, y cumple su minimo en la recta y su maximo en el circulo.

$$0 \leq x \leq 1$$
$$1 - x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$$

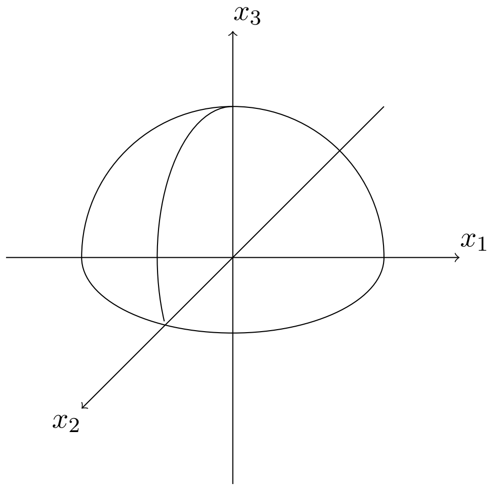
Ahora desarollamos la integral:

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega y \; dx \; dy &= \int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y \; dy \; dx \\
&= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \; dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - x^2 - (1-x)^2) \; dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 2x - 2x^2 \; dx = \frac{1}{2} \left[x^2 - \frac{2x^2}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

P2.- (2 puntos) Encuentre el centro de masa del cuarto de esfera dada por

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4 \ , \ x_2 \ \geq 0 \ , \ x_3 \ \geq 0 \ ,$$

si la densidad es $\sigma(x_1, x_2, x_3) = 1$.



R2.- Primero hagamos un dibujo.

Podemos describir este cuarto de bola en coordenadas esfericas:

$$\begin{aligned} &0 \leq r \leq 2 \\ &\pi \leq \theta \leq 2\pi \quad (\text{o } -\pi \leq \theta \leq 0) \\ &0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Para calcular la masa total, calculamos la integral:

$$\begin{aligned} \iiint_\Omega \sigma(x_1, x_2, x_3)\ dx_1\ dx_2\ dx_3 &= \iiint_\Omega r^2 \operatorname{sen}(\varphi)\ dr\ d\theta\ d\varphi \\ &= \left(\int_0^2 r^2\ dr\right) \cdot \left(\int_\pi^{2\pi}\ d\theta\right) \cdot \left(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi\ d\varphi\right) \\ &= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 \cdot [\theta]_\pi^{2\pi} \cdot [-\cos\varphi]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{8}{3} \cdot \pi \cdot 1 = \frac{8}{3}\pi. \end{aligned}$$

Ahora notamos $M = \frac{8}{3}\pi$ y vamos a calcular las coordenadas del centro de masa.

Para $\overline{x_1}$: como el cuarto de bola y la densidad son simmetrica con respecto al plano $x_1 = 0$, deducemos que $\overline{x_1} = 0$. Eso se puede verificar con calculo:

$$\begin{aligned} \overline{x_1} = \frac{1}{M} \iiint_\Omega x_1\ dx_1\ dx_2\ dx_3 &= \iiint_\Omega r^3 \operatorname{sen}(\varphi)\cos(\varphi)\cos(\theta)\ dr\ d\theta\ d\varphi \\ &= \left(\int_0^2 r^3\ dr\right) \cdot \left(\int_\pi^{2\pi} \cos(\theta)\ d\theta\right) \cdot \left(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(\varphi)^2\ d\varphi\right) \end{aligned}$$

y como $\int_\pi^{2\pi} \cos(\theta)\ d\theta = [\operatorname{sen}(\theta)]_\pi^{2\pi} = 0$, no hay nada mas que calcular.

$$\overline{x_2} = \frac{1}{M}\iiint_\Omega x_1\ dx_1\ dx_2\ dx_3 = \iiint_\Omega r^3 \operatorname{sen}(\varphi)\cos(\varphi)\operatorname{sen}(\theta)\ dr\ d\theta\ d\varphi$$
$$= \left(\int_0^2 r^3\ dr\right)\cdot\left(\int_\pi^{2\pi}\operatorname{sen}(\theta)\ d\theta\right)\cdot\left(\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(\varphi)^2\ d\varphi\right)$$

La primitiva dificil es la de $\operatorname{sen}(\varphi)^2$. Ocupamos la formula trigonometrica $\cos(2\varphi) = \cos(\varphi)^2 - \operatorname{sen}(\varphi)^2 = 1 - 2\operatorname{sen}(\varphi)^2$ para obtener $\operatorname{sen}(\varphi)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\varphi)$. Dado que $\operatorname{sen}(2\varphi)$ se deriva en $2\cos(2\varphi)$, la primitiva de $\cos(2\varphi)$ es $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\varphi)$. Entonces:

$$\overline{x_2} = \frac{1}{M}\iiint_\Omega x_1\ dx_1\ dx_2\ dx_3 = \frac{1}{M}\cdot\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2\cdot[-\cos(\theta)]_\pi^{2\pi}\cdot\left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\varphi)\right]_0^{\pi/2}$$
$$= \frac{1}{M}\cdot 4\cdot 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{8\pi/3} = \frac{3}{4}.$$

Para $\overline{x_3}$ se ve que la forma de la bola y la densidad es la misma en x_3 y en x_2, así que obtenemos igualmente $\overline{x_3} = \frac{3}{4}$. Se puede verificar con calculo que es el mismo que para x_2, salvo que hay que ocupar la formula $\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\varphi)$.

Concluyemos que el centro de masa es $(0, \frac{3}{4}, \frac{3}{4})$.

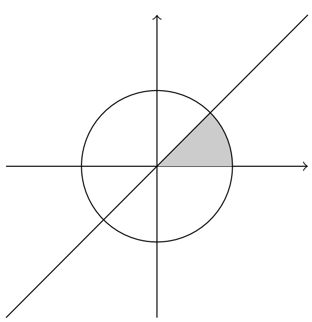
P3.- (2 puntos) Calcule

$$\iint_\Omega x_1 dx_1 dx_2\ ,$$

donde Ω es la región en $\mathbb{R}^2$ dada por las desigualdades siguientes:

- $0 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 4$,
- $0 \leq x_2 \leq x_1$.

R2.- Primero hagamos un dibujo.



La primera ecuación nos indica que la región de integración es adentro del circúlo de centro $\binom{0}{0}$ y de radio 2. La secunda ecuacion nos indica que la región es en el cuarto de plano superior ($x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$) y ademas que es abajo de la recta de ecuación$x_1 - x_2 = 0$. Así obtenemos la región gris en el dibujo.

Las coordenadas polares parecen la buena opción para ese caso aunque tambíen se puede hacer en cartesianas. La región se describe con:

$$\begin{aligned} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

y podemos calcular la integral:

$$\begin{aligned} \iint_\Omega x_1 dx_1 dx_2 &= \iint_\Omega r\cos(\theta) r \; dr \; d\theta \\ &= \int_0^2 \int_0^{\pi/4} r^2 \cos(\theta) \; d\theta \; dr \\ &= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 [\mathrm{sen}(\theta)]_0^{\pi/4} = \frac{4\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$