# Pauta del solemne 3.

**P1**.- Sea $\vec{F}$ el campo vectorial dado por $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_2, x_3)$. Calcule $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{x}$ si :

a) $\Gamma$ es la circumferencia dada por $x_1^2 + x_2^2 = 4$ y $x_3 = 7$, usando la orientación que usted prefiera.

b) $\Gamma$ es la recta que une los puntos $\vec{p} = (1, 0, 0)$ y $\vec{q} = (1, 0, 4)$.

c) $\Gamma$ es el helicoide parametrizado por

$$\{\vec{x}(t) = (\cos(4\pi t), \operatorname{sen}(4\pi t), 4t) \mid t \in [0, 1]\}.$$

**R1**.- Primero verifiquemos si $\vec{F}$ es un campo conservativo.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_1 & -x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix}$$

y entonces $\vec{F}$ es conservativo.

a) $\Gamma$ es la intersección entre un cilindro y un plano horizontal, es decir una circumferencia (como indicado). Aun sin dibujo es claro que es una curva cerrada. Por lo tanto $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0$.

Las curvas en b) y c) son son cerradas y tenemos que ocupar la formula $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{x} = f(\text{punto final}) - f(\text{punto inicial})$, donde $f$ es la función tal que $\vec{\nabla} f = \vec{F}$. Para encontrar $f$ tenemos que solucionar la ecuación :

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial x_1} & = x_1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & = -x_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} & = x_3 \end{array} \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^2}{2}.$$

b) Dado que el punto initial es $\vec{p} = (1, 0, 0)$ y el punto final es $\vec{q} = (1, 0, 4)$, obtenemos

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{x} = f(1, 0, 4) - f(1, 0, 0) = \frac{1^2}{2} + \frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 8.$$

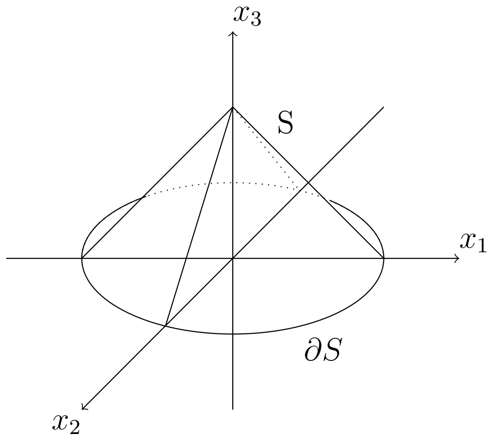
c) El punto inicial es el valor de la parametrización cuando $t = 0$, es decir $(\cos(0), \operatorname{sen}(0), 0) = (1, 0, 0)$. El punto final es $(\cos(4\pi), \operatorname{sen}(4\pi), 4) = (1, 0, 4)$. Esos puntos son los mismos que para la curva anterior, y $\vec{F}$ es conservativo, por lo tanto que $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{x} = 8$.

**P2.-** Si $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_1, 1 + x_1 + x_2)$, calcule

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

donde $S$ es la parte del cono $x_1^2 + x_2^2 = (1 - x_3)^2$ que esta entre los planos $x_3 = 0$ y $x_3 = 1$, con la normal hacia el exterior.

**R2.-** Primero hagamo un dibujo.




Fíjense que la superficie no esta cerrada : el texto habla de ”la parte del cono entre los planos”, que es unicamente la parte de la superficie $x_1^2 + x_2^2 = (1 - x_3)^2$ donde se cumple $0 \leqslant x_3 \leqslant 1$.
Dado que calculamos un rotacional, la integral se puede calcular a mano o con el teorema de Stokes, que vamos a ocupar aquí. Tenemos

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

donde $\partial S$ es el borde de la superficie. Podemos ver en el dibujo que ese borde es una circumferencia de intersección del cono con $x_3 = 0$. Lo podemos verificar con calculo : el borde del cono esta constituido de las partes donde $x_3 = 0$ o $x_3 = 1$, y

$$\begin{matrix} x_1^2 + x_2^2 = (1 - x_3)^2 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{matrix} x_1^2 + x_2^2 = (1 - x_3)^2 \\ x_3 = 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \vec{x} = (1, 1, 0)$$

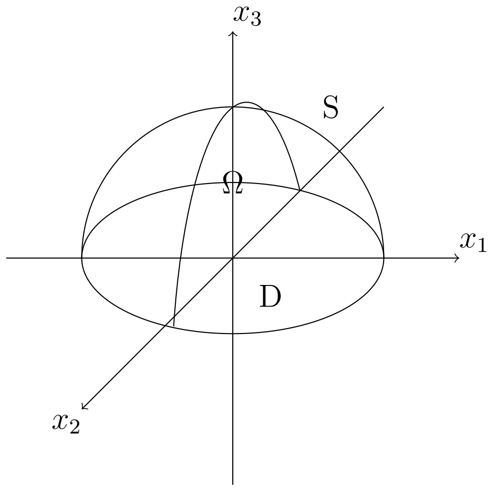
Podemos reconocer en la parte de izquierda una circumferencia de radio 1 y la parte de derecha es un puro punto que no cuenta en la integral de linea. Esta circumferencia la orientamos en el sentido antihorario dado que la integral de superficie esta orientada hacia el exterior, es decir hacia arriba, y que en el teorema de Stokes el flujo sube a mano izquierda.

Para parametrizar esa circumferencia ocupamos las coordenadas cilindricas :

$$\begin{matrix} x_1 = r\cos\theta \\ x_2 = r \operatorname{sen}\theta \\ x_3 = z \end{matrix} \qquad \text{con las ecuaciones} \qquad \begin{matrix} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} r = 1 \\ z = 0 \end{matrix}$$

Asi que eligemos como parametro $t = \theta : 0 \to 2\pi$ (verificamos que el angúlo aumenta para tener un sentido antihorario) y la parametrización es $\vec{x}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$. Continuando el calcúlo :

$$\begin{aligned} \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} &= \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{x} \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \\ 1 + \cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t) dt = \int_0^{2\pi} -1 dt = -2\pi. \end{aligned}$$




**P3.-** Use el teorema de la divergencia en $\mathbb{R}^3$ para calcular

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

donde

$$\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_3^2, \frac{x_2^3}{3} + \tan x_3, x_1^2 x_3 + x_2^2)$$

y $S$ es la mitad superior de la esfera de radio 1 centrada en el origen.

**R3.-**Primero hagamos un dibujo.
El teorema de la divergencia nos dice que la integral triple de la divergencia de $\vec{F}$ en el volumen $\Omega$ es igual al flujo total de $\vec{F}$ a través de la superficie cerrada hacia el exterior. Podemos ver que la superficie tiene dos partes : la mitad superior de la esfera $S$ y un disco $D$ en el plano $x_3 = 0$ que hace un "tapa de abajo". En ecuación :

$$\iiint_\Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_D \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

donde la parte que queremos calcular es $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

Calculemos primero $\iiint_\Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dx_1 dx_2 dx_3$. Tenemos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} = x_3^2 + x_2^2 + x_1^2.$$

Para parametrizar la mitad de bola pasamos en coordenadas esfericas. Las cotas de integración son :

$$r : 0 \to 1$$
$$\theta : 0 \to 2\pi$$
$$\phi : 0 \to \tfrac{\pi}{2}$$

(lo podemos ver en el dibujo o con calculo : $x_3 \geqslant 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} \phi \geqslant 0$). Agregamos el Jacobiano ya que es una integral triple con $dx_1 dx_2 dx_3$.

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r^2 \cdot r^2 \operatorname{sen} \phi \, dr d\theta d\phi \\ &= \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 \cdot [\theta]_0^{2\pi} \cdot [-\cos \phi]_0^{\pi/2} = \frac{2\pi}{5}.\end{aligned}$$

Ahora calculemos $\iint_D \vec{F}\cdot d\vec{S}$. El disco $D$ tiene radio 1 y esta contenido en el plano $x_3 = 0$, y lo podemos parametrizar con cilindricas :

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta \\ x_2 &= r\operatorname{sen}\theta \\ x_3 &= z \end{aligned} \qquad \text{y tenemos} \qquad \begin{aligned} u &= r : 0 \to 1 \\ v &= \theta : 0 \to 2\pi \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos la parametrización $\vec{x}(u,v) = (u\cos v, u\operatorname{sen} v, 0)$. Derivar con respecto a $u$ da el vector $(\cos v, \operatorname{sen} v, 0)$ derivar con respecto a $v$ da $(-u\operatorname{sen} v, u\cos v, 0)$.

$$\begin{pmatrix} \cos v \\ \operatorname{sen} v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u\operatorname{sen} v \\ u\cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -u\operatorname{sen} v & u\cos v & 0 \\ \cos v & \operatorname{sen} v & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -u \end{pmatrix}$$

Reemplazando las valores de la parametrización en la expresión de $\vec{F}$, obtenemos $(0, \frac{1}{3}(u\operatorname{sen} v)^3, (u\operatorname{sen} v)^2)$.

$$\begin{aligned} \iint_D \vec{F}\cdot d\vec{S} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}(u\operatorname{sen} v)^3 \\ (u\operatorname{sen} v)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} dvdu \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} u^3 \operatorname{sen}^2 v dvdu \\ &= \left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1-\operatorname{sen}(2v)}{2} dv \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left[v - \frac{-\cos(2v)}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{4} + \pi. \end{aligned}$$

Ahora con la ecuación inicial

$$\iiint_\Omega \vec{\nabla}\cdot\vec{F} dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} + \iint_D \vec{F}\cdot d\vec{S},$$

podemos ver que

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \frac{2\pi}{5} - \frac{1}{4} - \pi = -\frac{1}{4} - \frac{3\pi}{5}.$$