Algorithmique
Notion de complexité

Florent Hivert

Mél : `Florent.Hivert@lri.fr`
Adresse universelle : `http://www-igm.univ-mlv.fr/~hivert`

Outils mathématiques : analyse élémentaire

$(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$	suite de terme général U_k, $k \in \mathbb{N}$
$(U_k)_{k\in K}$	famille d'index $K \subset \mathbb{N}$; suite extraite de $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$
$\displaystyle\sum_{k=p}^{q} U_k$	somme des termes U_k où k vérifie $p \leq k \leq q$ (entiers) ; lorsque $p > q$, la somme est *vide* et vaut 0
$\displaystyle\prod_{k=p}^{q} U_k$	produit des termes U_k où k vérifie $p \leq k \leq q$ (entiers) ; lorsque $p > q$, le produit est *vide* et vaut 1

Identité sur les sommes et produits

$$\sum_{k=p}^{q} U_k = \left(\sum_{k=p}^{q-1} U_k\right) + U_q = U_p + \left(\sum_{k=p+1}^{q} U_k\right)$$

Plus généralement, si $P(n)$ est un prédicat :

$$\sum_{k=p}^{q} U_k = \sum_{\substack{k=p \\ P(k) \text{ est vrai}}}^{q} U_k + \sum_{\substack{k=p \\ P(k) \text{ est faux}}}^{q} U_k$$

Un exemple très courant :

$$\sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ est pair}}}^{n} U_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ est impair}}}^{n} U_k$$

Idem pour les produits.

Outils mathématiques : arithmétique

opérateurs usuels :

$$+ \quad - \quad \times \quad / \quad < \quad \leq \qquad \mathrm{mod}$$

$\lfloor x \rfloor$ partie entière inférieure (ou *plancher*) du réel x : le plus grand entier $\leq x$

$\lceil x \rceil$ partie entière supérieure (ou *plafond*) du réel x : le plus petit entier $\geq x$

$n!$ la *factorielle* de n :

$$n! := \prod_{i=1}^{n} i = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

Parties entières et égalités

Pour tout réel x, pour tout entier n :

- $\lfloor x \rfloor = n \iff n \leq x < n+1$;
- $\lceil x \rceil = n \iff n-1 < x \leq n$;
- $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$;
- $\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$.

Pour tout entier n :

- $n = \lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil$.

Parties entières et inégalités

Pour tout réel x, pour tout entier n :

- $\lfloor x \rfloor < n \iff x < n$;
- $\lceil x \rceil \leq n \iff x \leq n$;
- $n < \lceil x \rceil \iff n < x$;
- $n \leq \lfloor x \rfloor \iff n \leq x$.

Pour tous réels x et y :

- $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$;
- $\lceil x \rceil + \lceil y \rceil - 1 \leq \lceil x + y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$.

Fonctions usuelles

$\ln$	fonction logarithme népérien (ou naturel), de base e
$\log_a$	fonction logarithme de base a : $\log_a(x) = \ln x / \ln a$
$\log$	fonction logarithme sans base précise, *à une constante multiplicative près*
$\log_2$	fonction logarithme binaire, de base 2 :

$$\log_2(x) = \ln x / ln2$$

Complexités

Définitions (complexités temporelle et spatiale)

- ***complexité temporelle*** *: (ou* ***en temps****) : temps de calcul ;*
- ***complexité spatiale*** *: (ou* ***en espace****) : l'espace mémoire requis par le calcul.*

Définitions (complexités pratique et théorique)

- *La* ***complexité pratique*** *est une mesure précise des complexités temporelles et spatiales pour un* ***modèle de machine donné****.*
- *La* ***complexité (théorique)*** *est un* ***ordre de grandeur*** *de ces couts, exprimé de manière la plus* ***indépendante*** *possible des conditions pratiques d'exécution.*

Un exemple

Problème (plus grand diviseur)

Décrire une méthode de calcul du plus grand diviseur autre que lui-même d'un entier $n \geq 2$.

Notons $pgd(n)$ le plus grand diviseur en question.

On a :

- $1 \leq pgd(n) \leq n - 1$;
- $pgd(n) = 1 \iff n$ est premier.

Un exemple

Problème (plus grand diviseur)

Décrire une méthode de calcul du plus grand diviseur autre que lui-même d'un entier $n \geq 2$.

Notons $pgd(n)$ le plus grand diviseur en question.

On a :

- $1 \leq pgd(n) \leq n - 1$;
- $pgd(n) = 1 \iff n$ est premier.

Algorithme (1)

Puisqu'il s'agit de trouver le plus grand diviseur, on peut procéder en décroissant sur les diviseurs possibles :

1	k	$n-1$
à voir		*vus*

$\leftarrow$

Algorithme

calcul du plus grand diviseur (solution 1)

- *Entrée : un entier n*
- *Sortie : $pgd(n)$*

$k \leftarrow n-1$
tant que $n \bmod k \neq 0$: $k \leftarrow k-1$
retourner k

Algorithme (1)

Puisqu'il s'agit de trouver le plus grand diviseur, on peut procéder en décroissant sur les diviseurs possibles :

$$\begin{array}{|c|c|} \multicolumn{1}{l}{1 \hfill k} & \multicolumn{1}{r}{n-1} \\ \hline \textit{à voir} & \textit{vus} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{\leftarrow} \end{array}$$

Algorithme

calcul du plus grand diviseur (solution 1)

- *Entrée : un entier n*
- *Sortie : $pgd(n)$*

$k \leftarrow n-1$
tant que $n \bmod k \neq 0$: $k \leftarrow k-1$
retourner k

Algorithme (1)

Puisqu'il s'agit de trouver le plus grand diviseur, on peut procéder en décroissant sur les diviseurs possibles :

1	k	$n-1$
à voir		*vus*
	$\leftarrow$	

Algorithme

calcul du plus grand diviseur (solution 1)

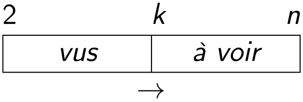
- *Entrée : un entier n*
- *Sortie : $pgd(n)$*

$k \leftarrow n - 1$
tant que $n \bmod k \neq 0$ *:* $k \leftarrow k - 1$
retourner k

Algorithme (2)

Remarque : le résultat cherché est $n \div p$, où p est le *plus petit* diviseur supérieur ou égal à 2 de n.

Notons $ppd(n)$ le plus petit diviseur en question.



Algorithme (calcul du plus grand diviseur (solution 2))

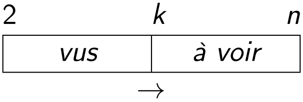
- *Entrée : un entier n*
- *Sortie : $pgd(n)$*

$k \leftarrow 2$
tant que $n \bmod k \neq 0$: $k \leftarrow k + 1$
retourner n/k

Algorithme (2)

Remarque : le résultat cherché est $n \div p$, où p est le *plus petit* diviseur supérieur ou égal à 2 de n.

Notons $ppd(n)$ le plus petit diviseur en question.



Algorithme (calcul du plus grand diviseur (solution 2))

- *Entrée : un entier* n
- *Sortie :* $pgd(n)$

$k \leftarrow 2$

tant que $n \bmod k \neq 0$: $k \leftarrow k + 1$

retourner n/k

Algorithme (3)

On peut maintenant tenir compte de ce que :

$$n \text{ non premier } \implies 2 \leq ppd(n) \leq pgd(n) \leq n-1.$$

D'où il vient que :

$$n \text{ non premier } \implies (ppd(n))^2 \leq n.$$

Proposition

Si n ne possède pas de diviseur compris entre 2 et $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$, c'est qu'il est premier ;

Cece permet d'*améliorer* le temps de calcul pour les nombres premiers : il est donc inutile de chercher en croissant entre $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$ et n.

Algorithme (3)

En procédant en croissant sur les diviseurs possibles :

2	k	$\lfloor\sqrt{n}\rfloor$	n
vus	*à voir*	*à ne pas voir*	

$\rightarrow$

Algorithme (calcul du plus grand diviseur (solution 3))

- *Entrée : un entier n*
- *Sortie : $pgd(n)$*

$k \leftarrow 2$

tant que $n \bmod k \neq 0$ *et* $k \leq n/k$: $k \leftarrow k+1$

si $k > n/k$ *retourner* 1 *sinon retourner* n/k

Algorithme (3)

En procédant en croissant sur les diviseurs possibles :

2	k	$\lfloor\sqrt{n}\rfloor$	n
vus	*à voir*	*à ne pas voir*	

$\rightarrow$

Algorithme (calcul du plus grand diviseur (solution 3))

- *Entrée : un entier n*
- *Sortie : $pgd(n)$*

$k \leftarrow 2$

tant que $n \bmod k \neq 0$ *et* $k \leq n/k$: $k \leftarrow k+1$

si $k > n/k$ *retourner* 1 *sinon retourner* n/k

Analyse des trois algorithmes

Calcul des complexités temporelles pratiques des solutions (1), (2) et (3) :

Leurs formulations sont du type :

A_1
tant que C : A_2
A_3

Pour un algorithme donné, soient t_1, t_C, t_2 et t_3 les temps d'exécution respectifs des actions A_1, C, A_2 et A_3.

Hypothèse : la boucle représentée en machine par un branchement conditionnel et un branchement inconditionnel ; temps d'exécution respectifs : t_{BC} et t_{BI}.

Le temps d'exécution est donc :

$$t_1 + (t_{\mathrm{BC}} + t_C + t_2 + t_{\mathrm{BI}})B(n) + t_C + t_{\mathrm{BC}} + t_3,$$

où $B(n)$ est le nombre de boucles exécutées.

Analyse des trois algorithmes

Calcul des complexités temporelles pratiques des solutions (1), (2) et (3) :

Leurs formulations sont du type :

A_1
tant que C : A_2
A_3

Pour un algorithme donné, soient t_1, t_C, t_2 et t_3 les temps d'exécution respectifs des actions A_1, C, A_2 et A_3.

Hypothèse : la boucle représentée en machine par un branchement conditionnel et un branchement inconditionnel ; temps d'exécution respectifs : t_{BC} et t_{BI}.

Le temps d'exécution est donc :

$$t_1 + (t_{\mathrm{BC}} + t_C + t_2 + t_{\mathrm{BI}})B(n) + t_C + t_{\mathrm{BC}} + t_3,$$

où $B(n)$ est le nombre de boucles exécutées.

Analyse des trois algorithmes

Calcul des complexités temporelles pratiques des solutions (1), (2) et (3) :

Leurs formulations sont du type :

A_1
tant que C : A_2
A_3

Pour un algorithme donné, soient t_1, t_C, t_2 et t_3 les temps d'exécution respectifs des actions A_1, C, A_2 et A_3.

Hypothèse : la boucle représentée en machine par un branchement conditionnel et un branchement inconditionnel ; temps d'exécution respectifs : t_{BC} et t_{BI}.

Le temps d'exécution est donc :

$$t_1 + (t_{\mathrm{BC}} + t_C + t_2 + t_{\mathrm{BI}})B(n) + t_C + t_{\mathrm{BC}} + t_3,$$

où $B(n)$ est le nombre de boucles exécutées.

Analyse des trois algorithmes

Calcul des complexités temporelles pratiques des solutions (1), (2) et (3) :

Leurs formulations sont du type :

> A_1
> tant que C : A_2
> A_3

Pour un algorithme donné, soient t_1, t_C, t_2 et t_3 les temps d'exécution respectifs des actions A_1, C, A_2 et A_3.

Hypothèse : la boucle représentée en machine par un branchement conditionnel et un branchement inconditionnel ; temps d'exécution respectifs : t_{BC} et t_{BI}.

Le temps d'exécution est donc :

$$t_1 + (t_{\mathrm{BC}} + t_C + t_2 + t_{\mathrm{BI}})B(n) + t_C + t_{\mathrm{BC}} + t_3,$$

où $B(n)$ est le nombre de boucles exécutées.

Analyse des trois algorithmes

Retenir

Sur une machine où les opérations sur les entiers s'effectuent en temps constant, le temps d'exécution est donc de la forme :

$$a\,B(n) + b$$

où a et b sont des constantes.

Borne maximale :

Pour les solution (1) et (2)	$B(n) \leq n - 2$
Pour la solution (3)	$B(n) \leq \lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1$

Complexité temporelle maximale :

Pour les solution (1) et (2)	$a'\,n + b'$
Pour la solution (3)	$a'\lfloor\sqrt{n}\rfloor + b'$

Analyse des trois algorithmes

Retenir

Sur une machine où les opérations sur les entiers s'effectuent en temps constant, le temps d'exécution est donc de la forme :

$$a\,B(n) + b$$

où a et b sont des constantes.

Borne maximale :

Pour les solution (1) et (2) $B(n) \leq n - 2$

Pour la solution (3) $B(n) \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1$

Complexité temporelle maximale :

Pour les solution (1) et (2) $a'\,n + b'$

Pour la solution (3) $a'\,\lfloor \sqrt{n} \rfloor + b'$

En pratique

Voici les temps d'exécution mesurés pour quelques nombres à la fois premiers et proches de puissances de 10 :

n	*solution 1*	*solution 2*	*solution 3*
101	0,000 000 6s	0,000 000 7s	0,000 000 3s
100003	0,000 427 s	0,000 425 s	0,000 003 s
10000019	0,045 s	0,044 s	0,000 031 s
1000000007	4.47 s	4.56 s	0,000 308 s

Opération élémentaire

On cherche à définir une notion de compléxité **robuste** : indépendante de l'ordinateur, du compilateur, du langage de programmation, *etc.*. Exprimée en fonction de la **Taille** de la donnée à traiter.

Retenir (opération élémentaire)

Opération qui prend un temps constant (ou presque).

Opération élémentaire

On cherche à définir une notion de compléxité **robuste** : indépendante de l'ordinateur, du compilateur, du langage de programmation, *etc.*. Exprimée en fonction de la **Taille** de la donnée à traiter.

Retenir (opération élémentaire)

Opération qui prend un temps constant (ou presque).

Complexité d'un algorithme

Cout de $\mathcal{A}$ sur x : l'exécution de l'algorithme $\mathcal{A}$ sur la donné x requiert $C_{\mathcal{A}}(x)$ opérations élémentaires.

Définitions (Cas le pire, cas moyen)

n désigne la taille de la donnée à traité.

- *Dans le pire des cas :* $C_{\mathcal{A}}(n) := \max\limits_{x\ |x|=n} C_{\mathcal{A}}(x)$
- *En moyenne :* $C_{\mathcal{A}}^{Moy}(n) := \sum\limits_{x\ |x|=n} p_n(x) C_{\mathcal{A}}(x)$

  p_n : distribution de probabilité sur les données de taille n.

Notations asymptotiques

Les constantes n'importent pas !

Définition (notations asymptotiques)

Soit $g : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}^+$ *une fonction positive.*

- $O(g)$ *est l'ensemble des fonctions positives* f *pour lesquelles il existe une constante positive* α *et un rang* n_0 *tels que :*

$$f(n) \leq \alpha g(n), \quad \textit{pour tout } n \geq n_0.$$

- $\Omega(g)$ *est l'ensemble des fonctions positives* f *pour lesquelles il existe une constante positive* α *et un rang* n_0 *tels que :*

$$f(n) \geq \alpha g(n), \quad \textit{pour tout } n \geq n_0.$$

- $\Theta(g) = O(g) \cap \Omega(g)$.

Par commodité, les expressions « image » des fonctions sont souvent utilisées dans les notations plutôt que leurs symboles. On écrit ainsi « $f(n) \in X(g(n))$ » plutôt que « $f \in X(g)$ », où X signifie O, Ω ou Θ.

Par commodité toujours, on écrit souvent « est » plutôt que « $\in$ » et on dit souvent « est » plutôt que « appartient ».

Exemple

notations asymptotiques (1/2)

$n \in O(n)$	$n \in \Omega(n)$	$n \in \Theta(n)$
$7 + 1/n \in O(1)$	$7 + 1/n \in \Omega(1)$	$7 + 1/n \in \Theta(1)$
$\log_2 n \in O(\log n)$	$\log_2 n \in \Omega(\log n)$	$\log_2 n \in \Theta(\log n)$
$n + \ln n \in O(n)$	$n + \ln n \in \Omega(n)$	$n + \ln n \in \Theta(n)$
$n^2 + 3n \in O(n^3)$	$n^2 + 3n \notin \Omega(n^3)$	$n^2 + 3n \notin \Theta(n^3)$

Par commodité, les expressions « image » des fonctions sont souvent utilisées dans les notations plutôt que leurs symboles. On écrit ainsi « $f(n) \in X(g(n))$ » plutôt que « $f \in X(g)$ », où X signifie O, Ω ou Θ.

Par commodité toujours, on écrit souvent « est » plutôt que « $\in$ » et on dit souvent « est » plutôt que « appartient ».

Exemple

notations asymptotiques (1/2)

$n \in O(n)$	$n \in \Omega(n)$	$n \in \Theta(n)$
$7 + 1/n \in O(1)$	$7 + 1/n \in \Omega(1)$	$7 + 1/n \in \Theta(1)$
$\log_2 n \in O(\log n)$	$\log_2 n \in \Omega(\log n)$	$\log_2 n \in \Theta(\log n)$
$n + \ln n \in O(n)$	$n + \ln n \in \Omega(n)$	$n + \ln n \in \Theta(n)$
$n^2 + 3n \in O(n^3)$	$n^2 + 3n \notin \Omega(n^3)$	$n^2 + 3n \notin \Theta(n^3)$

On cherche toujours à exprimer toute notation asymptotique à l'aide de fonctions de référence : constante, somme, produit, puissance, logarithme, minimum, maximum...

Définitions (désignations des complexités courantes)

notation	*désignation*	*notation*	*désignation*
$\Theta(1)$	*constante*	$\Theta(n^2)$	*quadratique*
$\Theta(\log n)$	*logarithmique*	$\Theta(n^3)$	*cubique*
$\Theta(\sqrt{n})$	*racinaire*	$\Theta(n^k)$, $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$	*polynomiale*
$\Theta(n)$	*linéaire*	$\Theta(a^n)$, $a > 1$	*exponentielle*
$\Theta(n \log n)$	*quasi-linéaire*	$\Theta(n!)$	*factorielle*

Exemple

Suite aux résultats précédents, on peut énoncer que le problème du calcul du plus grand diviseur peut se résoudre en temps au plus racinaire avec un espace constant.

On cherche toujours à exprimer toute notation asymptotique à l'aide de fonctions de référence : constante, somme, produit, puissance, logarithme, minimum, maximum...

Définitions (désignations des complexités courantes)

notation	*désignation*	*notation*	*désignation*
$\Theta(1)$	*constante*	$\Theta(n^2)$	*quadratique*
$\Theta(\log n)$	*logarithmique*	$\Theta(n^3)$	*cubique*
$\Theta(\sqrt{n})$	*racinaire*	$\Theta(n^k)$, $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$	*polynomiale*
$\Theta(n)$	*linéaire*	$\Theta(a^n)$, $a > 1$	*exponentielle*
$\Theta(n \log n)$	*quasi-linéaire*	$\Theta(n!)$	*factorielle*

Exemple

Suite aux résultats précédents, on peut énoncer que le problème du calcul du plus grand diviseur peut se résoudre en temps au plus racinaire avec un espace constant.

On cherche toujours à exprimer toute notation asymptotique à l'aide de fonctions de référence : constante, somme, produit, puissance, logarithme, minimum, maximum...

Définitions (désignations des complexités courantes)

notation	*désignation*	*notation*	*désignation*
$\Theta(1)$	*constante*	$\Theta(n^2)$	*quadratique*
$\Theta(\log n)$	*logarithmique*	$\Theta(n^3)$	*cubique*
$\Theta(\sqrt{n})$	*racinaire*	$\Theta(n^k)$, $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$	*polynomiale*
$\Theta(n)$	*linéaire*	$\Theta(a^n)$, $a > 1$	*exponentielle*
$\Theta(n \log n)$	*quasi-linéaire*	$\Theta(n!)$	*factorielle*

Exemple

Suite aux résultats précédents, on peut énoncer que le problème du calcul du plus grand diviseur peut se résoudre en temps au plus racinaire avec un espace constant.

Aucun progrès technologique (modèle de machine standard) ne permet à un algorithme de changer de classe de complexité.

Exemple (tyranie de la complexité)

Effets de la multiplication de la puissance d'une machine par 10, 100 et 1000 sur la taille maximale N des problèmes que peuvent traiter des algorithmes de complexité donnée :

Aucun progrès technologique (modèle de machine standard) ne permet à un algorithme de changer de classe de complexité.

Exemple (tyranie de la complexité)

Effets de la multiplication de la puissance d'une machine par 10, 100 et 1000 sur la taille maximale N des problèmes que peuvent traiter des algorithmes de complexité donnée :

complexité	$\times 10$	$\times 100$	$\times 1000$
$\Theta(\log n)$	N^{10}	N^{100}	N^{1000}
$\Theta(\sqrt{n})$	$10^2\,N$	$10^4\,N$	$10^6\,N$
$\Theta(n)$	$10\,N$	$100\,N$	$1000\,N$
$\Theta(n \log n)$	$< 10\,N$	$< 100\,N$	$< 1000\,N$
$\Theta(n^2)$	$\simeq 3\,N$	$10\,N$	$\simeq 32\,N$
$\Theta(n^3)$	$\simeq 2\,N$	$\simeq 5\,N$	$10\,N$
$\Theta(2^n)$	$\simeq N+3$	$\simeq N+7$	$\simeq N+10$

Propriétés des notations asymptotiques

Proposition

Soient f, g, h, l *des fonctions positives et* $a, b \in \mathbb{R}^+$.
X *désigne n'importe lequel des opérateur* O, Ω *ou* Θ

- *Si* $f \in X(g)$ *et* $g \in X(h)$ *alors* $f \in X(h)$ *;*
- *Si* $f, g \in X(h)$ *alors* $af + bg \in X(h)$ *;*
- *Si* $f \in X(h)$ *et* $g \in X(l)$ *alors* $fg \in X(hl)$ *;*
- *Si* $f \in \Omega(h)$ *alors pour tout* g *on a* $af + bg \in \Omega(h)$ *;*

Cas des polynômes

Proposition

Un polynôme est de l'ordre de son degré. Plus précisément si

$$P = \sum_{i=0}^{d} c_i x^i$$

avec $c_d \neq 0$ (c'est-à-dire que d est le degré de P) alors

$$P \in \Theta(x^d)$$

.

Par exemple, $5x^3 + 3x^2 + 100x + 12 \in \Theta(x^3)$.

Récapitulatif

Complexité	Vitesse	Temps	Formulation	Exemple
Factorielle	très lent	proportionnel à N^N	$N!$	Résolution par recherche exhaustive du problème du voyageur de commerce.
Exponentielle	lent	proportionnel à une constante à la puissance N	K^N	Résolution par recherche exhaustive du Rubik's Cube.
Polynomiale	moyen	proportionnel à N à une puissance donnée	N^K	Tris par comparaison, comme le tri à bulle (N^2).
Quasi-linéaire	assez rapide	intermédiaire entre linéaire et polynomial	$N\log(N)$	Tris quasi-linéaires, comme le Quicksort.
Linéaire	rapide	proportionnel à N	N	Itération sur un tableau.
Logarithmique	très rapide	proportionnel au logarithme de N	$\log(N)$	Recherche dans un arbre binaire.
Constante	le plus rapide	indépendant de la donnée	1	recherche par index dans un tableau.

Calcul de complexité dans les structures de contrôle

- Instructions élémentaires (affectations, comparaisons) sont en temps constant, soit en $\Theta(1)$.

- Tests : si $a \in O(A)$, $b \in O(B)$ et $c \in O(C)$ alors

$$(\texttt{if } a \texttt{ then } b \texttt{ else } c) \in O(A + \max(B, C))$$

- Tests : si $a \in \Omega(A)$, $b \in \Omega(B)$ et $c \in \Omega(C)$ alors

$$(\texttt{if } a \texttt{ then } b \texttt{ else } c) \in \Omega(A + \min(B, C))$$

Cas des boucles imbriquées

- Boucles si $a_i \in O(A_i)$ (idem Ω, Θ) alors

$$(\texttt{for } i \texttt{ from } 1 \texttt{ to } n \texttt{ do } a_i) \in O\left(\sum_{i=1}^{n}(A_i)\right)$$

- Lorsque A_i est constant égal à A, on a

$$(\texttt{for } i \texttt{ from } 1 \texttt{ to } n \texttt{ do } a_i) \in nO(A)$$

Retenir (Boucles imbriqués)

Cas particulier important : si $A_i \in O(i^k)$ (idem Ω, Θ) alors

$$(\textit{for } i \textit{ from } 1 \textit{ to } n \textit{ do } a_i) \in O(n^{k+1})$$