

Tout document, calculatrice, téléphone portable ou ordinateur est interdit.

Les exercices sont indépendants. Si l'on ne sait pas justifier une question, on peut néanmoins utiliser la réponse dans la suite.

Durée : 1 heure

► **Exercice 1. (Échelles de comparaisons)**

Dans cet exercice f, g, h sont des fonctions positives.

1. Montrer que si $f \in O(g)$ et $g \in O(h)$ alors $f \in O(h)$.

On considère les fonctions suivantes :

$$f_1 = 17x, \quad f_2 = 5x^3 + 8x + 2, \quad f_3 = 2 \log(x) + 1, \quad f_4 = 3x + 1, \quad f_5 = 2^x + x$$

2. Remplir un tableau 5×5 en mettant dans la case à l'intersection de la ligne i et de la colonne j le symbole qui convient selon la règle :

- Θ si $f_i \in \Theta(f_j)$, • O si $f_i \in O(f_j)$ mais $f_i \notin \Theta(f_j)$, • \times sinon.

► **Exercice 2. (Calcul de $\lfloor \log_2 \left(\frac{a}{b} \right) \rfloor + 1$)**

On considère l'algorithme suivant :

- En entrée : deux entiers strictement positifs a et b tels que $b \leq 2a$.
- En sortie : N

```
1  N <- 0
2  M <- b
3  tant que M <= a faire
4      M <- 2*M
5      N <- N + 1
6  retourner N
```

1. Montrer que l'algorithme termine.
2. Montrer que la condition suivante est vérifiée au début de la boucle et est un invariant de boucle :

$$0 \leq N \quad \text{et} \quad M = 2^N * b \quad \text{et} \quad M \leq 2a.$$

3. En déduire que à la fin de la boucle on a

$$0 \leq N \quad \text{et} \quad M = 2^N * b \quad \text{et} \quad a < M \leq 2a.$$

4. En déduire que $N = \lfloor \log_2 \left(\frac{a}{b} \right) \rfloor + 1$.

► **Exercice 3. (Nombre de 1 en base 2)**

Écrire un algorithme récursif qui calcule le nombre de chiffres 1 dans l'écriture en base 2 d'un nombre donné n .

► **Exercice 4. (Fonction inconnue)**

On considère la fonction suivante :

```
1  int syracuse(int n)
2  {
3      printf("%i ", n);
4      if (n == 1) return 1;
5      else
6          {
7              if (n % 2 == 0) return 1+syracuse(n/2);
8              else           return 2+syracuse(3*n+1);
9          }
10 }
```

1. Quel est l'affichage lors de l'appel `syracuse(4)` ? Indication : On montrera que la fonction retourne l'entier 3.
2. Même question pour l'appel `syracuse(6)` (la valeur retournée est ici 11) ?