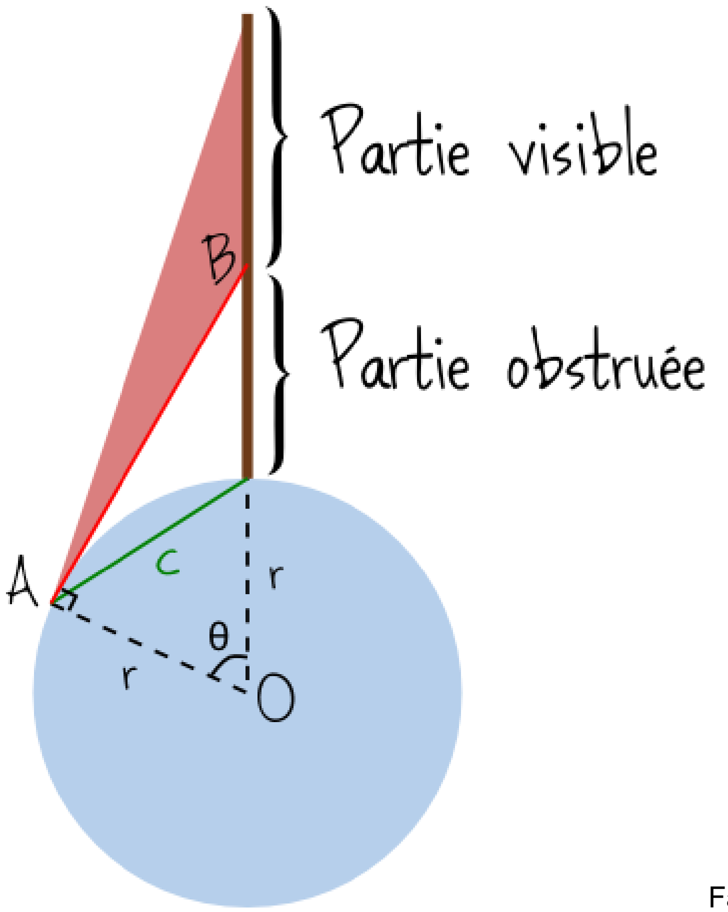
La rotondité de la Terre et les voiles des bateaux

https://sciencetonnante.wordpress.com/2014/06/23/la-rotondite-de-la-terre-et-les-voiles-des-bateaux/

Il y a quelques jours, ma fille m'a posé des questions sur la rotondité de la Terre. Je lui ai alors servi l'histoire habituelle, selon laquelle les Anciens avaient déjà remarqué que **les voiles des bateaux étaient visibles avant leur coque**, ce qui confirmait que la Terre était ronde.
Et puis je me suis demandé : est-ce bien raisonnable ? Est-ce que *vraiment* on pourrait ne voir que les voiles des bateaux ? Ou est-ce que l'effet est négligeable pour être vu à l'oeil nu ?
Eh bien faisons le calcul !

Un peu de géométrie

Le problème est assez simple. Imaginons un grand mât, situé à une distance de disons quelques kilomètres. A cause de la courbure de la Terre, la partie inférieure de ce mât ne sera pas visible. La question est : quelle est la taille de cette partie obstruée ? Si c'est quelques centimètres, peu de chances qu'on le remarque. Si c'est plusieurs mètres, ça commence à devenir crédible.



Faisons un peu de géométrie. J'ai tracé un schéma ci-contre, où j'ai évidemment exagéré les dimensions pour les besoins de la cause. Le rayon de la Terre est r, le mat est située à une distance c (mesurée en ligne droite) de l'observateur A. Quelle est la taille de la partie obstruée ?

Le premier rayon lumineux obstrué par la rotondité de la Terre (AB, dessiné en rouge) est juste tangent à la courbure de la Terre. On voit que la longueur obstruée L est égale à la distance $OB - r$. En faisant un peu de géométrie dans le triangle rectangle OAB, on peut écrire que

$$OB = \frac{r}{\cos\theta}$$

Il nous faut ensuite trouver l'angle θ. Heureusement il existe une relation facile à démontrer entre le rayon r d'un cercle, l'angle θ et la longueur de la corde c sous-tendue par cet angle. On a :

$$c = 2r\sin(\theta/2)$$

On a donc

$$\theta = 2\arcsin(c/2r)$$

Vous voyez qu'on va devoir prendre le cosinus de cet angle et avoir un truc qui a l'air compliqué.

Heureusement, il y a là aussi une formule de trigo toute prête qui nous sauve, on a de manière générale pour tout x

$$\cos(2 \arcsin x) = 1 - 2x^2$$

Si on regroupe tout, on a donc que la longueur obstruée est égale à

$$L = \frac{r}{1-2(c/2r)^2} - r$$

Après un petit choc de simplification, on a alors

$$L = \frac{c^2 r}{2r^2 - c^2}$$

Application numérique

Dans tous les cas pratiques, on a $c << R$, puisque le rayon de la Terre est d'environ 6400 km, et que l'on va considérer des bateaux à une distance de quelques kilomètres. On se ramène donc à une expression très simple qui est

$$L \sim \frac{c^2}{2r}$$

qu'on aurait certainement pu trouver directement en prenant dès le début une approximation « petit angle » pour θ.

Avec une distance de 10 km, et on trouve pour la partie obstruée une distance d'environ 8 mètres. Suffisant pour obstruer la coque du bateau mais laisser les voiles visibles. Voilà qui paraît tout à fait raisonnable !

Petite vérification, une distance de 8 mètres vues sous 10km représente un angle de 0.044 degrés, soit 2,7 minutes d'arc. On estime que le pouvoir de résolution de l'oeil est d'environ 1 minute d'arc, donc ça peut presque coller même à l'oeil nu. Avec une longue vue, encore plus simple. Bien sûr il faut un temps clair, pas de vagues, etc.

Si quelqu'un veut offrir une belle photo qui montre le phénomène avec un joli bateau à voiles, je suis preneur !