LOGIQUE & CALCUL

Les tours de Hanoï, plus qu'un jeu d'enfants

Le problème inventé par Édouard Lucas en 1883 fait apparaître des liens avec un grand nombre de sujets mathématiques : arithmétique, graphes, fractales, etc.

Jean-Paul DELAHAYE

Certains voudraient classer les idées et les domaines mathématiques en fonction de leur sérieux et de leur intérêt « profond ». Il y aurait d'un côté les vraies mathématiques, difficiles, exigeantes, justifiant que les professionnels s'y intéressent et dont la subtile hiérarchie serait fixée par une petite élite. De l'autre, il y aurait les récréations, jeux, amusements et divertissements mathématiques traitant de thèmes faciles et combinatoires pour amateurs plus ou moins cultivés qui cherchent à occuper leurs loisirs avec des problèmes sans véritable importance.

La réalité est moins tranchée et l'histoire montre qu'il n'y a pas de frontière entre ce qui est digne de l'attention des professionnels et ce qui n'est qu'un passe-temps pour passionnés ignorants. Le grand théorème de Fermat n'est au départ qu'une question arithmétique insignifiante. La conjecture de Syracuse n'est qu'un jeu irritant, sans importance avant qu'on admette qu'elle pose un vrai défi aux mathématiciens. Les sujets logiques et algorithmiques ne sont devenus centraux qu'une fois qu'on a compris qu'il fallait en avoir la maîtrise pour éviter l'incohérence qui guettait le mathématicien insouciant. Par exemple, en butant sur la question « P = NP ? », aux réelles incidences pratiques, on a vu qu'elle était au centre d'un authentique domaine de recherche. Une question si centrale que l'institut Clay l'a placée sur la liste des sept énigmes mathématiques les plus importantes et a offert un million de dollars, comme pour les six autres problèmes, à qui en donnerait la solution.

En mathématiques, tout est sérieux et toute énigme non résolue indique un point faible de l'état actuel des connaissances qu'il est absurde de négliger.

Édouard Lucas (1841-1891) est aujourd'hui principalement connu pour deux de ses travaux mathématiques. On lui doit une série de résultats arithmétiques, dont la conception d'algorithmes indiquant si un nombre est premier ou non. Certaines versions de ses tests de primalité sont toujours utilisées et servent à battre les records des plus grands nombres premiers : ce record est aujourd'hui le nombre $2^{57\,885\,181} - 1$, qui s'écrit avec 17 millions de chiffres.

À côté de ce sujet reconnu, Lucas inventa en 1883 la récréation mathématique des « tours de Hanoï », qui a donné lieu à plus de 300 publications scientifiques et conduit quatre chercheurs à lui consacrer un livre il y a deux ans *(voir la bibliographie)*. Nous allons présenter quelques facettes de ce magnifique casse-tête.

Le jeu est constitué de trois tiges verticales et de n disques circulaires troués de diamètres différents d_1, d_2,..., d_n (par ordre de taille décroissante) qui s'enfilent sur les tiges (ou plots) que l'on notera A, B et C. Au départ, les disques sont enfilés par taille décroissante sur la tige A. Le but du jeu est de faire passer la pile en C en respectant les deux règles suivantes. (1) On ne déplace qu'un seul disque à la fois, pris au sommet d'une des trois piles A, B ou C ; (2) Quand on déplace un disque, on doit le remettre au sommet de l'une des deux autres piles en le déposant sur un disque de diamètre supérieur.

Lors des déplacements, à chaque instant, les piles en A, B et C sont donc constituées de disques de tailles décroissantes. Le défi est de déplacer les disques de A à C, mais on aimerait aussi savoir quelle est la meilleure méthode, c'est-à-dire celle qui exige le moins de déplacements.

Une solution optimale

Pour $n = 1$, un seul déplacement est nécessaire et suffisant : A → C. Avec $n = 2$, trois déplacements suffisent et sont clairement nécessaires : A → B ; A → C ; B → C. Avant de considérer le cas général de n disques, notons qu'il est évident que la méthode optimale de déplacement d'une pile de n disques de A vers C en utilisant le plot auxiliaire B est la même, en changeant les noms des plots, que la méthode optimale pour déplacer n disques d'un plot X vers un plot Y en utilisant un plot Z comme auxiliaire.

Le point délicat du raisonnement consiste à montrer que dans une solution optimale, le plus grand disque d_1 ne se déplace qu'une seule fois et va de A à C. Nous ne donnerons pas ici la démonstration, qui est un peu longue, mais il faut savoir qu'elle est nécessaire.

Il s'ensuit que la méthode optimale pour n disques est composée de la méthode optimale pour déplacer $n-1$ disques de A vers B en utilisant le plot C comme auxiliaire, suivie du déplacement de d_1 de A vers C, puis de la méthode optimale pour déplacer $n-1$ disques de B vers C en utilisant A comme plot auxiliaire. Si l'on note $s(n)$ le nombre de déplacements de la solution optimale pour n disques, on a alors : $s(1) = 1$ et $s(n) = 1 + 2s(n-1) = 1+2+4s(n-2) = 1+2+4+8s(n-3) = ... = 1+2+4+...+2^{n-1} = 2^n - 1$. Le nombre minimal de mouvements est donc $2^n - 1$ et il croît exponentiellement quand n augmente.

Le raisonnement proposé indique comment s'y prendre, ce que l'on écrit, avec des notations évidentes, au moyen de deux égalités :
dép(1 A → C auxB) = [A → C] et
dép(n A → C auxB) = [dép($n-1$ A → B auxC) dép(1 A → C auxB) dép($n-1$ B → C auxA)].

C'est la définition récursive de l'algorithme optimal de résolution du problème des tours de Hanoï, « récursive » parce que la définition fait appel à elle-même, avec n remplacé par $n-1$, comme dans un raisonnement par récurrence.

À l'ordinateur...

Les langages de programmation actuels permettent le plus souvent de programmer directement un algorithme avec une telle définition. Le langage *Prolog*, par exemple, autorise une écriture très proche de celle indiquée ci-dessus. Voici un programme en *Prolog* qui résout de manière optimale le problème :

```
dép(1, A, C, B) :- write(' De '), write(A), write(' vers '), write(C).
dép(N,A,C,B) :- N>1, M is N–1, dép(M,A,B,C), dép(1, A, C, B), dép(M, B, C, A).
```

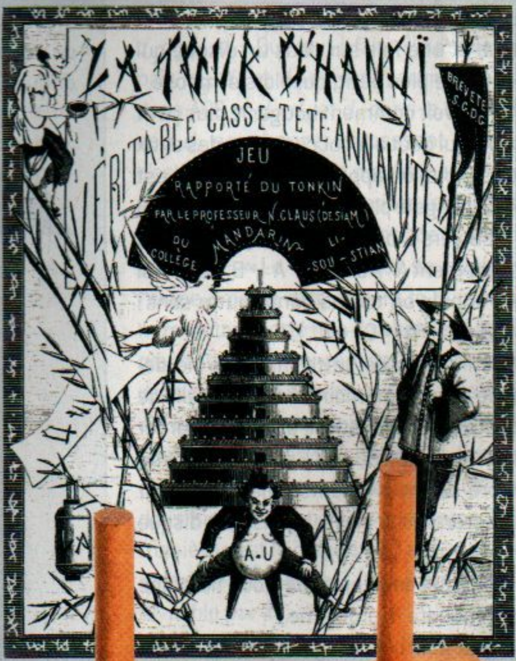
Pour exécuter le programme avec une pile de 10 disques, on demande simplement à *Prolog* dép(10, plotA, plotC, plotB) ce qui signifie « Que dois-je faire pour déplacer 10 disques du plot A vers le plot C en utilisant le plot B comme auxiliaire ? ». Le programme vous indique alors chaque déplacement à opérer. Par exemple, pour $n = 3$, il écrira à l'écran les 7 mouvements de la solution optimale : De plotA vers plotC ; De plotA vers plotB ;

Édouard Lucas, un mathématicien inventif

Édouard Lucas est né à Amiens en 1842. Il rencontre Louis Pasteur qui lui conseille l'École normale supérieure plutôt que Polytechnique. À sa sortie de l'ENS, il travaille à l'observatoire de Paris sous la direction d'Urbain Le Verrier. Il sera plus tard professeur au lycée Saint-Louis à Paris. En 1891, lors d'un banquet à Marseille, un serveur fait tomber une pile d'assiettes dont un éclat le blesse à la tête. L'infection provoquée l'emporte.

Ses travaux en arithmétique portent en particulier sur la suite de Fibonacci, qu'il généralise, donnant les « suites de Lucas ». Il trouve des tests de primalité qui lui permettent de prouver que le nombre $2^{127} - 1$ est un nombre premier (le plus grand à l'époque). On utilise toujours aujourd'hui ses tests pour battre des records.

Si certains casse-tête ont une origine mal connue, par exemple le taquin, ou le baguenaudier, celle des tours de Hanoï ne fait aucun doute. Édouard Lucas publia un fascicule « La tour d'Hanoï » décrivant le jeu. Le sous-titre est un peu étrange : « Jeu tombé de Saturne et rapporté du Tonkin par le Mandarin N. Claus (de Siam) ». Dans le texte, il est précisé que N. Claus est Mandarin du collège Li-Sou-Stian. On reconnaît les anagrammes de Lucas (pour Claus) et de Saint-Louis (Li-Sou-Stian) qui signent de manière indubitable que l'inventeur du jeu est Édouard Lucas.



De plotC vers plotB ; De plotA vers plotC ; De plotB vers plotA ; De plotB vers plotC ; De plotA vers plotC.

La popularité du problème des tours de Hanoï provient de l'existence de ce type de programmes de quelques lignes permettant d'avoir une solution même pour $n = 10$ (1023 mouvements) ou $n = 20$ (plus d'un million de mouvements). Pour comprendre la programmation récursive, rien de mieux que le casse-tête d'Édouard Lucas !

À la main...

En revanche, pour exécuter les bons mouvements de la solution optimale avec par exemple $n = 8$ vrais disques en bois sans commettre d'erreur (255 mouvements), la définition récursive n'est pas commode : vous serez vite perdu dans les différents appels aux solutions optimales avec $n - 1$ disques, $n - 2$ disques, etc. On a donc recherché des méthodes plus faciles. En pratique, la plus simple est celle-ci :

– On bouge une fois sur deux le plus petit disque et une fois sur deux un disque qui n'est pas le plus petit, qui alors s'impose.

– Pour savoir comment bouger le plus petit disque, qui peut aller occuper l'un des deux autres plots, on applique la règle : si n est pair, on bouge le plus petit disque de A vers B ou de B vers C ou de C vers A (c'est-à-dire cycliquement A → B → C → A → B → C...) ; si n est impair, on tourne dans l'autre sens : A → C → B → A → C → B...).

L'utilisation de cette méthode ne demande aucune mémoire autre que celle de la parité de n (pour savoir si on doit tourner dans le sens ABC ou ACB), et de la parité du nombre de mouvements déjà faits (pour savoir si on doit déplacer le plus petit disque ou un autre).

Voici une deuxième méthode humaine pour résoudre le problème :

– si n est pair, opérer cycliquement le seul mouvement possible (1) entre A et B ; (2) entre A et C ; (3) entre B et C.

– si n est impair, opérer cycliquement le seul mouvement possible (1) entre A et C ; (2) entre A et B ; (3) entre B et C.

Une troisième solution consiste à distinguer les disques de numéros pairs et

Le graphe d

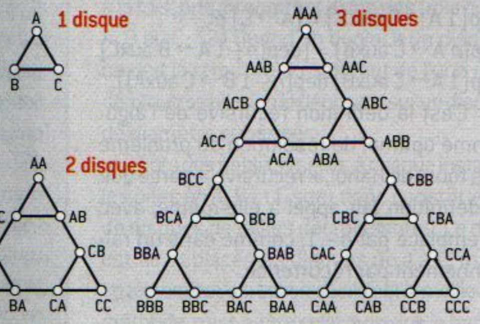
Les configurations sont notées de la manière suivante : les plots sont A, B, C et on indique la position des n disques dans un n-uplet où la position du disque d_i est donnée par le i-ème symbole du n-uplet. Ainsi, le triplet CBA représente la position légitime de trois disques avec le disque d_1 (le plus gros) en C, le disque d_2 en B et le disque d_3 en A.

Le graphe des positions permises est en *(a)* ; pour trois disques, la position initiale est AAA (les trois disques sont sur le plot A), la position finale CCC (les trois disques sont sur le plot C). Le chemin de la solution optimale consiste à suivre de haut en bas le côté droit du triangle : AAA-AAC-ABC-ABB-CBB-CBA-CCA-CCC. En dessinant le graphe pour des nombres de plus en plus grands de disques, il converge vers le tapis fractal de Sierpinski *(b)*.

Pour quatre disques *(c)*, on voit immédiatement qu'on ne peut pas faire de chemin plus court. Mais il n'est pas vrai que toute solution passe par le déplacement du plus grand disque de A vers C (arc ABBB-CBBB) comme on l'affirme parfois : le cheminement passant par le côté gauche du triangle, puis par le côté tout en bas, ne comporte pas de déplacement du grand disque de A vers C.

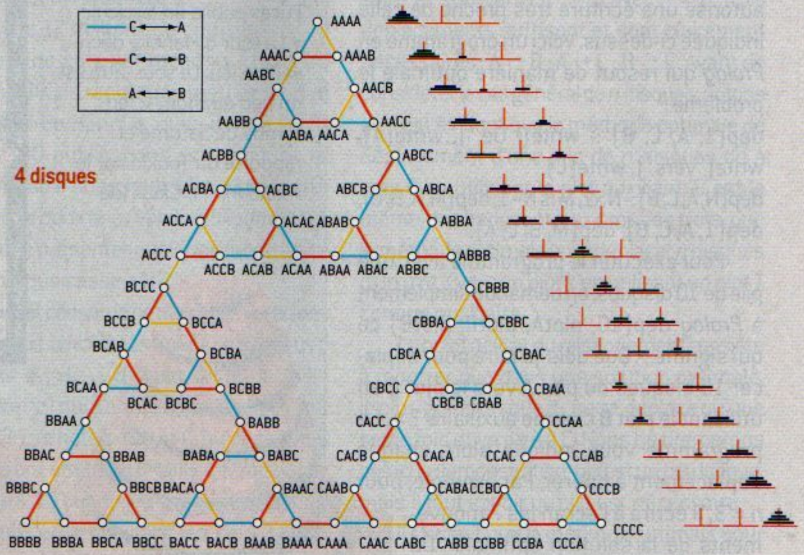
Le graphe des positions permises, dont on imagine

a

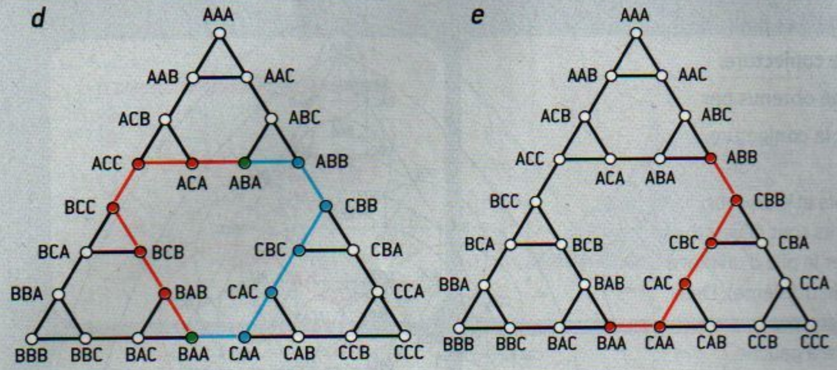


b

c



onfigurations légitimes



sans mal la forme générale pour *n* disques, donne la réponse à de nombreuses questions (qu'ensuite on démontre). Voici quelques exemples d'affirmations tirées de l'examen du graphe.

– Il existe toujours un chemin entre deux positions légitimes et on passe de l'une à l'autre en $2^n - 1$ mouvements au plus.

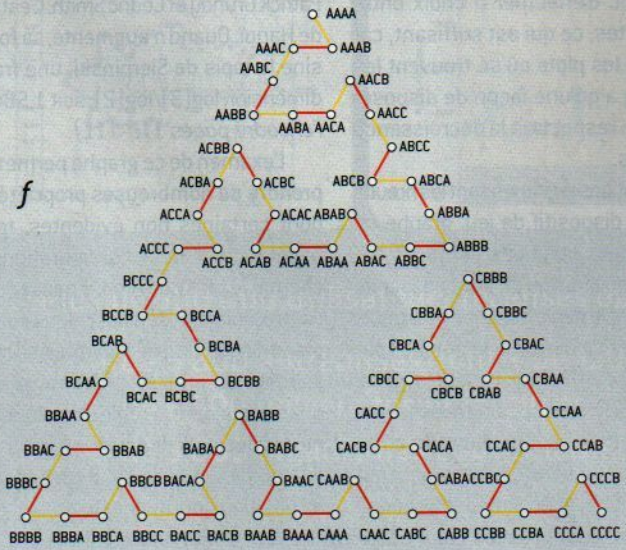
– Parfois, il existe deux plus courts chemins différents entre deux positions ; c'est le cas sur la figure *d* entre BAA et ABA *(en vert)* qui sont reliés par deux chemins distincts de même longueur 6 *(en rouge et en bleu)*.

– Le plus court chemin entre deux positions comporte parfois deux déplacements du plus grand disque *(comme entre BAA et ABB sur la figure e)*.

– La suppression d'un arc ne sépare jamais le graphe en deux morceaux disjoints, mais la suppression de deux arcs peut le faire.

– Il existe un chemin (unique) du point de départ au but passant par toutes les configurations permises possibles sans jamais passer deux fois par la même (chemin dit hamiltonien).

Le plus étonnant est que le chemin hamiltonien de la figure *f* est la solution optimale pour le problème des tours de Hanoï où seuls les mouvements entre A et B (dans les deux sens) ainsi qu'entre B et C (dans les deux sens) sont autorisés. Il est inattendu que, si l'on interdit les déplacements entre A et C (dans les deux sens), il soit encore possible de déplacer la pile de *n* disques de A vers C, et que cela oblige à passer par les 3^n configurations du jeu.



impairs (on peut par exemple colorier en noir les pairs et en blanc les impairs) et à déterminer le mouvement que l'on fait en fonction des deux règles suivantes :

– le premier mouvement est de A vers C si *n* est impair, et de A vers B sinon ;

– pour les autres mouvements, ne jamais faire le mouvement inverse de celui qu'on vient de faire et ne jamais poser un disque sur un disque de même parité.

Propriétés miraculeuses, mais démontrables

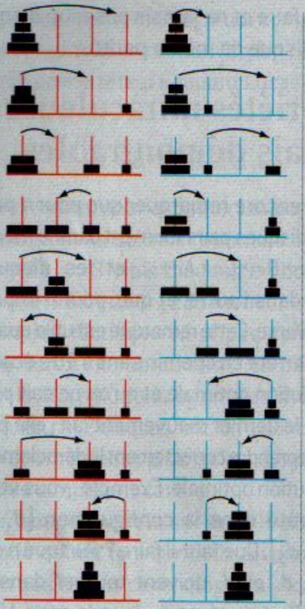
On peut encore remarquer que pour *n* pair, tous les disques pairs tournent dans le même sens A → B → C → A → ... et les disques impairs dans l'autre, et que, pour *n* impair, c'est l'inverse. Cette remarque est utile quand on s'est arrêté en chemin sans s'être écarté de la solution optimale et qu'on ne sait plus quel est le dernier mouvement fait ; elle permet de reprendre correctement le déroulement de la solution optimale. Exemple : vous vous êtes arrêté dans la configuration $[d_1 d_6, d_3 d_4 d_5, d_2]$. Que faut-il faire ? Puisque *n* est pair, d_1, d_3 et d_5 doivent tourner dans le sens ACB et d_2, d_4 et d_6 dans le sens ABC ; seul d_6 peut bouger en passant de A à B ; c'est donc le prochain mouvement.

Voici encore une propriété remarquable de la suite des mouvements de la solution optimale : « Le disque qui se déplace à l'étape *p* est le disque dont le numéro, en numérotant cette fois du plus petit au plus grand et en commençant par 0, est le nombre de fois qu'on peut diviser *p* par 2. » Le disque qui bouge en premier est donc le disque 0 (car p = 1 n'est pas divisible par 2) ; le second disque qui bouge est le disque 1 (car 2 est divisible par 2 une fois exactement) ; le troisième est le disque 1 (3 est impair) ; le quatrième le disque 3 (car 4 est deux fois divisible par 2), etc.

Des rapports entre les tours de Hanoï et la suite de Stern-Brocot, la suite de Fibonacci *(voir « La suite de Stern-Brocot, sœur de la suite de Fibonacci », Pour la Science, octobre 2012)*, la suite de Gray-Gros *(voir « Voyageurs et baguenaudiers », Pour la Science, août 1997)*, le triangle de Pascal et bien d'autres sujets sont détaillés dans

Solutions optimales avec quatre plots

La solution optimale avec 4 plots au lieu de 3 et pour *n* disques faisait depuis 1941 l'objet d'une conjecture. Quelques résultats avaient cependant été obtenus par calculs. En 2014, Thierry Bousch a pu prouver la conjecture.

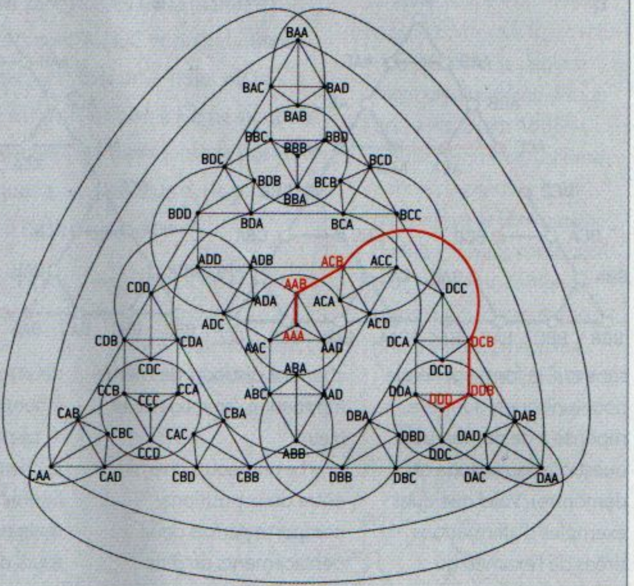


Pour 4 plots et 4 disques, 9 mouvements sont nécessaires pour déplacer la pile d'un plot à un autre (ici le troisième). Deux solutions différentes sont dessinées ci-contre à gauche.

Le nombre minimal de mouvements pour *n* disques est donné par la liste suivante : 1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 13 ; 17 ; 25 ; 33 ; 41 ; 49 ; 65 ; 81 ; 97 ; 113 ; 129 ; 161 ; 193 ; 225 ; 257 ; 289 ; 321 ; 385 ; 449 ; 513 ; 577 ; 641 ; 705 ; 769 ; 897 ; 1025 ; etc.

Le graphe des positions permises pour 4 plots ABCD est beaucoup moins simple que pour 3 plots et ne peut d'ailleurs pas se dessiner sans croisement sur le plan si le nombre de disques est supérieur à deux.

Le graphe pour trois disques ci-dessus a été dessiné en limitant le nombre de croisements le plus possible. C'est la meilleure disposition connue aujourd'hui ; elle est due à R. S. Schmid. La solution optimale pour déplacer les trois disques du plot A au plot D est indiquée en rouge.



le livre d'Andreas Hinz et ses coauteurs. On y montre que la combinatoire de la suite des mouvements des disques de Lucas est riche et se rattache à de nombreuses autres questions. Parmi les objets mathématiques bizarrement liés au casse-tête, il y a l'une des fractales les plus simples : le triangle de Sierpinski, déjà évoqué dans notre rubrique de septembre 2015.

Combien de positions permises ?

Connaître le cheminement optimal entre la position de départ et l'objectif fixé est certes intéressant, mais d'autres questions naturelles se posent concernant ces piles décroissantes de disques posés sur trois plots.

La première est : combien y a-t-il de façons de poser les *n* disques sur les plots A, B et C en respectant la règle qu'un disque doit toujours reposer sur un disque de plus grand diamètre ? Réponse : 3^n. En effet, chaque disque se trouve en A, en B ou en C. Déterminer une configuration permise demande donc d'effectuer *n* choix entre trois possibilités, ce qui est suffisant, car une fois fixés les plots où se trouvent les disques, il n'y a qu'une façon de disposer les disques en respectant la décroissance des diamètres.

Ces 3^n positions légitimes sont les nœuds du graphe du dispositif de jeu, graphe où un arc entre deux positions permises est dessiné à chaque fois qu'on peut passer de l'une à l'autre par le déplacement d'un disque. Si vous essayez de dessiner le graphe (par exemple pour $n = 3$) en le disposant le mieux possible pour bien faire apparaître ses régularités et symétries, vous découvrirez qu'on peut le représenter sans croisement : c'est un graphe planaire, et en donnant à chaque arc la même longueur (c'est un graphe allumette, voir notre rubrique de novembre 2014). Cette structure du graphe des tours de Hanoï était inconnue d'Édouard Lucas et ne fut découverte qu'en 1944 par Richard Scorer, Patrick Grundy et Cedric Smith. C'est le graphe de Hanoï. Quand *n* augmente, sa forme dessine le tapis de Sierpinski, une fractale de dimension log(3)/log(2), soit 1,5849... *(voir l'encadré pages 110-111)*.

L'examen de ce graphe permet de comprendre de nombreuses propriétés du jeu, dont certaines non évidentes, telles que l'existence de deux configurations dont le chemin le plus court pour passer de l'une à l'autre oblige à déplacer deux fois le plus grand disque. On y découvre aussi l'incroyable solution du problème des tours de Hanoï quand on ajoute la règle supplémentaire de ne pas déplacer directement un disque de A à C, ou de C à A : la solution passe par les 3^n positions permises !

Vers 1988, Andreas Hinz et Chan Hat-Tung ont obtenu une jolie formule (un peu longue) pour la distance moyenne, en nombre de déplacements, entre deux nœuds choisis au hasard. Cela a conduit à découvrir que la distance moyenne entre deux points du tapis de Sierpinski de côté 1 est le nombre rationnel 466/885, dont on se demande d'où il sort !

Parmi les nombreuses variantes envisagées du problème, il y a celle consistant à ajouter un quatrième plot, ou un cinquième, etc. Bien sûr, avec m plots ($m > 3$), on a des solutions plus courtes qu'avec trois : les plots supplémentaires facilitent les manipulations. Sauf dans le cas de quatre plots, résolu en 2014 par Thierry Bousch, mathématicien à l'université de Paris-Sud, personne ne connaît la solution générale pour déplacer de façon optimale une pile de n disques sur un autre plot. Ce problème est dénommé *Reve's Puzzle* ou « problème du bailli » et a été envisagé dès 1908 par Henry Dudeney.

Une piste pour le problème à *m* plots

Le graphe associé au problème à m plots est fini comme il l'est avec trois plots, et donc, pour chaque n donné, trouver le plus court chemin dans le graphe associé est envisageable en théorie en utilisant une méthode générale de recherche de plus court chemin dans un graphe et un ordinateur. En 2007, Richard Korf et Ariel Felner ont d'ailleurs calculé ce plus court chemin pour 4 plots et pour n allant de 1 à 30. Le calcul pour $n = 30$ a duré 30 jours et utilisé 398 gigaoctets de mémoire. Il est difficile d'aller beaucoup plus loin avec les possibilités de nos systèmes informatiques, le graphe ayant une taille qui croît exponentiellement en fonction de n (le nombre de positions permises est maintenant m^n).

Une piste pour le cas général a cependant été proposée. Elle est fondée sur l'idée suivante, que nous expliquons dans le cas de 4 plots, mais qui se généralise facilement. Pour faire passer les n disques du plot A au plot D, il suffit de choisir un entier k entre 1 et $n - 1$, de faire passer les k disques supérieurs de A à C par la méthode optimale pour quatre plots (qu'on suppose déjà connue), puis, en considérant seulement les plots A, B et D, de faire passer les $n - k$ disques restants en D par la méthode optimale pour trois plots (on la connaît, elle nécessite $2^{n-k} - 1$ déplacements), puis à nouveau de faire passer les k disques mis en C de manière optimale en D par la méthode optimale pour quatre plots.

Cette méthode dépend du paramètre k. Si l'on suppose connu le nombre de déplacements pour les solutions optimales avec $k < n$ pour quatre plots, on obtiendra certainement une assez bonne solution en retenant la valeur de k qui demande le moins de déplacements.

Ce procédé pour obtenir de proche en proche un assez bon algorithme pour n disques et quatre plots à partir des méthodes supposées connues pour k disques et quatre plots avec $k < n$ est dénommé algorithme de Frame-Stewart (il a été proposé en 1939 et 1941 par B. M. Stewart et J. S. Frame). Si l'on note $fs(n)$ le nombre de mouvements que ce procédé conduit à faire pour n disques, cette suite vérifie : $fs(1) = 1$ et $fs(n) = \text{minimum de } 2^{n-k} - 1 + 2fs(k)$, pour k allant de 1 à $n - 1$.

Dans le cas de 4 plots, on a su démontrer que cette idée était bonne et donnait la solution optimale quel que soit le nombre n de disques. En revanche, pour 5 plots ou plus, bien qu'aucun contre-exemple n'ait été trouvé, on ignore si c'est la bonne méthode pour déterminer la meilleure suite de mouvements.

Signalons pour terminer, mais il y a bien d'autres choses dans le livre d'Andreas Hinz et de ses collègues, que récemment Max Alekseyev et Toby Berger ont calculé le nombre moyen de mouvements nécessaires pour résoudre le problème classique (3 plots, n disques) dans le cas où l'on opère les déplacements au hasard : à chaque coup, on choisit au hasard équitablement entre les mouvements permis possibles. Ce nombre moyen est $(3^n - 1)(5^n - 3^n)/(2 \times 3^{n-1})$.

Cette expression augmente à peu près comme 5^n. Sans surprise, c'est considérablement plus que la méthode optimale, mais puisqu'il semble que les problèmes engendrés par les tours de Hanoï soient inépuisables, pourquoi se presser ? ■

■ L'AUTEUR

J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'Université de Lille et chercheur au Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille (CRISTAL).

■ BIBLIOGRAPHIE

T. Bousch, **La quatrième tour de Hanoï**, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, vol. 21(5), pp. 895-912, 2014.

A. M. Hinz *et al.*, **The Tower of Hanoi - Myths and Maths**, Birkhäuser, 2013.

J.-P. Delahaye, **La suite de Stern-Brocot, sœur de la suite de Fibonacci**, *Pour la Science*, n° 420, octobre 2012.

I. Stewart, **Four encounters with Sierpinski's gasket**, *The Mathematical Intelligencer*, vol. 17(1), pp. 52-64, 1995.

J.-P. Delahaye, **Voyageurs et baguenaudiers**, *Pour la Science*, n° 238, août 1997.

Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur www.pourlascience.fr