

Quand la musique est bonne, $3^{12} = 2^{19}$ [rediffusion]

<https://sciencetonnante.wordpress.com/2013/08/26/quand-la-musique-est-bonne-312-219-rediffusion/>

Nouvelle rediffusion pour l'été 2013, avec ce petit billet sur les mathématiques de la musique !



Dans ce billet nous allons voir en quoi l'existence de la musique occidentale repose sur le fait que 3 puissance 12 est (presque) égal à 2 puissance 19 ! Et pour cela, construisons un piano !

Le principe est simple : on va partir d'une première corde, dont la vibration produit une certaine note, et on va chercher successivement à construire les autres cordes du piano. Notre critère étant d'introduire de nouvelles cordes dont les sons « vont bien » avec ceux des cordes que l'on possède déjà.

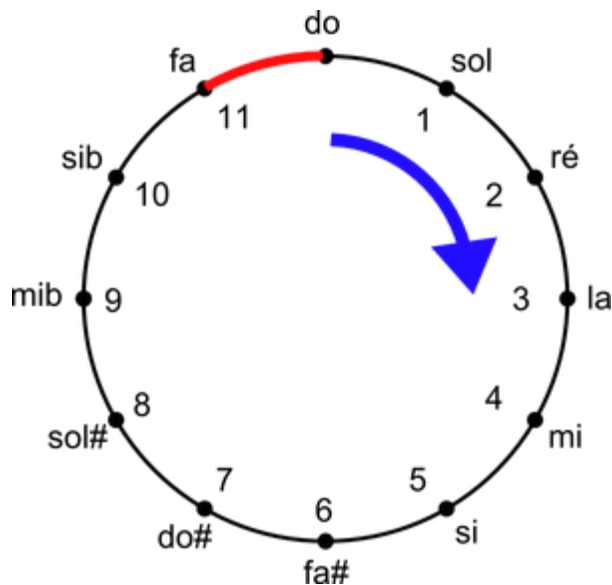
Et voyons où cela nous mène !

Notre première série de notes

Imaginons que nous disposions pour commencer d'une corde tendue. **Une corde qui vibre produit un son dont la fréquence dépend de sa longueur, de sa masse et de sa tension.** Plus la corde est longue et massive, plus la vibration sera grave; plus la corde est tendue, plus le son sera aigu. Supposons que notre corde de départ vibre naturellement à une fréquence de 131 Hz. Cette vibration produit un son plutôt grave, appelons cette note « Do ».

Pour chercher des notes qui « vont bien » avec notre note de départ, on va se référer à la physique des vibrations. En effet on sait que si un objet vibre naturellement à une certaine fréquence F , il a tendance à également vibrer un peu à la fréquence double, $2F$, c'est-à-dire dans dans notre cas $2 \times 131 = 262\text{Hz}$.

On comprend cela assez bien en observant une vraie corde et ses modes de vibration :



Et là, alors que vous vous apprêtez à construire votre 13^{ème} série de cordes, vous réalisez que **les fréquences de cette 13^{ème} série sont très très proches des fréquences de la première série !**

Musicalement, cela signifie que l'on cherche à construire la quinte du Fa, mais que cette dernière se trouve être quasiment le Do initial.

Et c'est là que la musique occidentale prend cette décision déterminante : considérer qu'effectivement le Do est quasi la quinte du Fa, qu'il n'y a pas besoin de rajouter une 13^{ème} série de cordes, et que la boucle est bouclée ! C'est ce qui est symbolisé sur le diagramme ci-contre qui montre le **cycle des quintes**. Au bout de 12 applications de la règle des quintes, on retombe sur la note initiale.

Reprenons l'arithmétique

Si on reprend l'arithmétique de la construction précédente, on s'aperçoit que le petit miracle qui fait qu'on retombe sur ses pieds à la 12^{ème} itération provient en fait de la (presque) égalité arithmétique **3 puissance 12 = 2 puissance 19**. C'est grâce à cette relation qu'en suivant le cycle des quintes 12 fois on finit par retomber sur des notes que l'on a déjà construites, et qu'on peut donc arrêter d'ajouter des nouvelles notes.

En fait, en pratique, plutôt que de laisser à la douzième itération le soin de combler à elle seule le léger écart, on décide de le répartir sur l'ensemble de la gamme. Cela évite qu'il y ait certains intervalles de la gamme qui sonnent plus faux que les autres (ce qu'on appelait le « loup » sur les anciens instruments). C'est-à-dire que sur un instrument moderne, pour construire la quinte d'une note, on ne va pas multiplier sa fréquence par 3 mais plutôt par $2^{(19/12)}$. Et tout ça passe inaperçu à l'oreille, car

$$2^{(19/12)} = 2.9966$$

Il est formidable de voir que ce miracle se produit après 12 itérations, ce qui permet tout de même d'avoir un nombre de notes suffisant pour faire des jolies choses, sans pour autant être astronomique, pour garder des instruments raisonnables !

Peut-on construire des musiques alternatives ?

Si l'on est un puriste, on peut considérer qu'après la douzième itération la boucle n'est pas exactement bouclée, et que l'on veut continuer à ajouter des séries de cordes jusqu'à avoir une proximité encore plus grande.

Eh bien **dans ce cas il faut attendre la 41^{ème} ou la 53^{ème} itération** ! En effet on a

$$2^{(65/41)} = 3.0008$$

$$2^{(84/53)} = 2.99988$$

On pourrait donc s'imaginer construire des instruments (et donc une musique) basée sur 53 notes (au lieu de 12). Bon il faudrait des pianos à près de 380 touches !

Si vous êtes matheux et que voulez aller encore plus loin, vous pouvez bien sûr chercher d'autres approximations rationnelles de $\ln(3)/\ln(2)$, car c'est bien de cela qu'il s'agit ! Pour les trouver, le mieux est de passer par un [développement en fractions continues](#) (485/306 marche bien aussi...) Pour ma part, je retourne écouter JJ Goldman...

