LOGIQUE & CALCUL

Tous les chemins mènent au rond

Le rotor-router est un mécanisme déterministe de cheminement fondé sur des règles simples. Il forme cependant des structures aux propriétés étonnantes et, à certains égards, plus performantes que celles des parcours aléatoires.

Jean-Paul DELAHAYE et Philippe MATHIEU

Laissée à elle-même, la matière dans l'espace se met en boule. La forme ronde apparaît spontanément même si au départ rien n'est rond. En mathématiques, il existe aussi des situations où se forment des ronds alors qu'on ne les attend pas. La situation de ce type la plus extraordinaire est le « rotor-router ». Il a déjà été évoqué dans cette rubrique (*voir* Mathématiques expérimentales, *Pour la Science n° 331, mai 2005*), mais il est intéressant d'y revenir, car un énorme travail de recherche a été mené à son sujet depuis dix ans et a dévoilé les propriétés de ce mécanisme de déplacement sur un graphe.

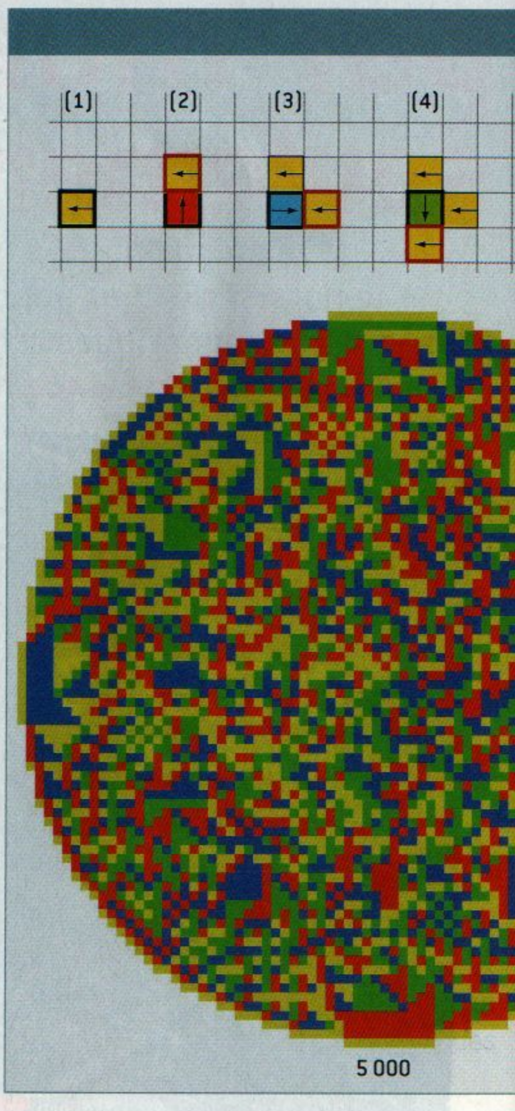
Girouettes déterministes

Imaginons un terrain semé de poteaux munis chacun d'une flèche à leur sommet et pointant vers un autre poteau du même type. Un agent mobile, par exemple un personnage, se place en un point O où est planté un poteau, et procède ainsi : il fait tourner la flèche du poteau où il se trouve, puis se déplace vers le poteau qu'elle indique alors ; arrivé à ce deuxième poteau, il en fait tourner la flèche et la suit, etc. L'agent continue alors sa promenade qui peut-être le conduira à revenir en O, une ou plusieurs fois.

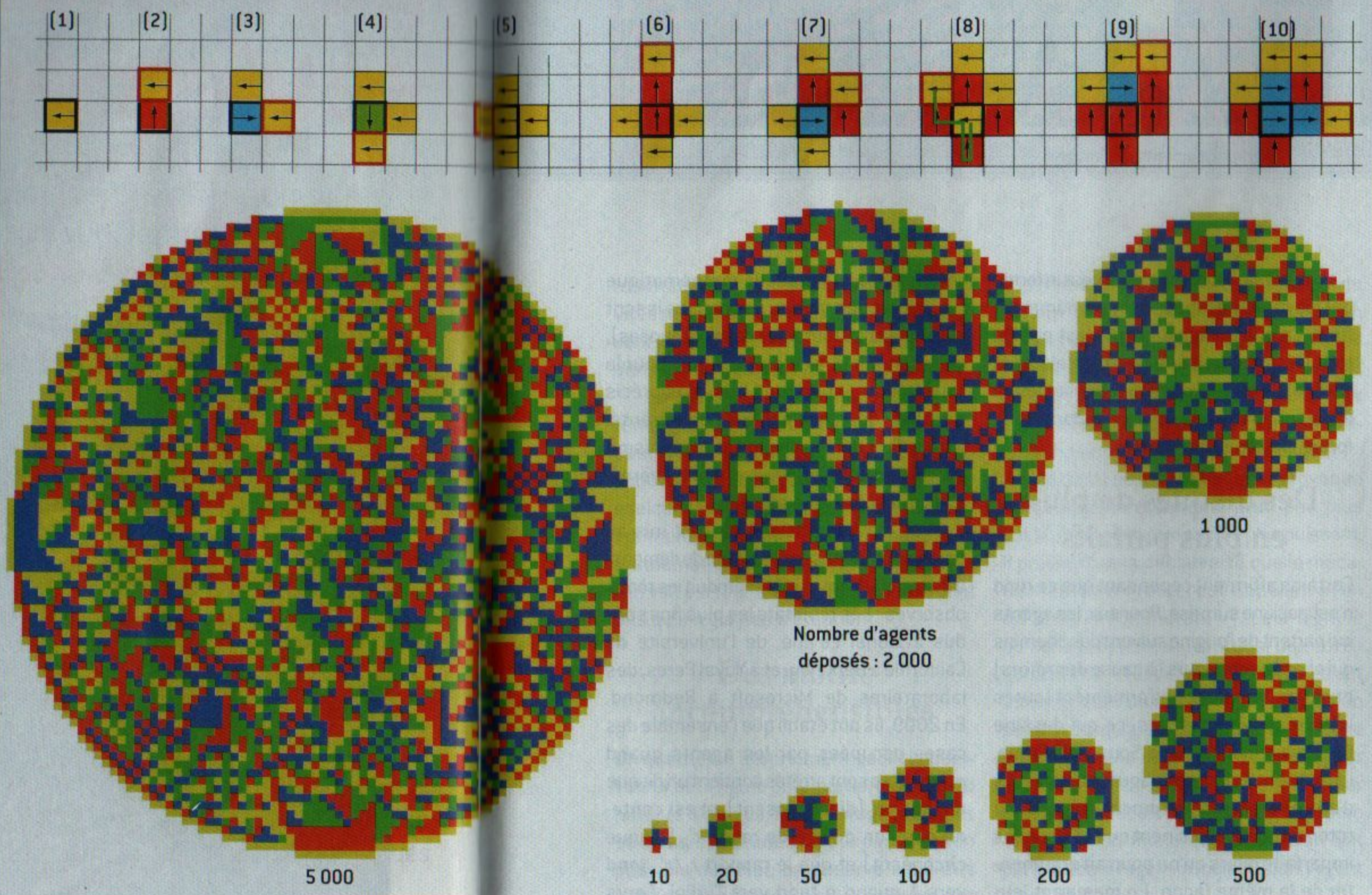
Ce mécanisme élémentaire est celui du rotor-router : chaque flèche tournante, nous dirons rotor, indique la route à l'agent mobile qui n'a aucune mémoire propre et se fie pour son chemin aux indications des rotors qui pivotent à chaque passage. Dans certains cas, plusieurs agents se déplaceront simultanément et interagiront donc par la rotation des rotors. Ce type de communication sans mémoire propre des agents porte le nom de stigmergie. Dans la nature, il est utilisé par certains insectes, fourmis ou termites, qui, en déposant des phéromones là où ils passent, organisent ainsi des comportements collectifs d'où émergent des activités cohérentes, telle la construction d'un nid.

Si l'on se donne un graphe quelconque – des nœuds reliés par des arêtes (dont on supposera qu'elles n'ont pas d'orientation) –, il est possible de l'équiper de rotors et d'envisager de le parcourir selon le mécanisme décrit. Pour qu'aucun nœud du graphe ne soit oublié, on imposera que le rotor de chaque nœud pointe successivement, de manière cyclique, vers tous les nœuds voisins. Si, par exemple, le nœud N a trois nœuds voisins A, B et C, le rotor placé en N pointera vers A, puis B, puis C au cours des passages successifs, puis recommencera : A, B, C, A, B, C, ...

Le modèle du mécanisme général du rotor-router a été proposé la première fois en 1996 par le Russe Viacheslav Priezzhev et les Indiens Deplap Dhar, Abhishek Dhar, et Supriya Krishnamurthy sous le nom de « promeneur eulérien » (nous verrons plus loin pourquoi). Le modèle a été redécouvert



Le rotor-router sur le plan



On pose successivement des agents mobiles sur la case centrale *(entourée d'un cadre noir)* d'un quadrillage infini du plan. Quand un agent arrive sur une case vide, il y dépose un rotor (une flèche

tournante) en l'orientant vers l'ouest et reste sur la case. Ainsi, le premier agent déposé occupe la case centrale *(1)*. Quand la case sur laquelle arrive un agent est occupée, il fait tourner le rotor de 90° dans le sens horaire et suit la direction alors indiquée en se déplaçant d'une case, où le processus recommence *(la dernière cellule créée est encadrée de rouge)*. Le jaune indique que le rotor pointe vers l'ouest, le rouge vers le nord, le bleu vers l'est, le vert vers le sud. Ainsi, l'agent 2 trouve une case centrale occupée, fait tourner son rotor de 90° qui pointe alors vers le nord et y dépose un rotor jaune *(2)*. L'agent 3 trouve la case centrale occupée par un rotor rouge, le fait tourner pour qu'il devienne bleu et se déplace vers l'est, où il dépose un rotor jaune *(3)*. Etc.

Avec ces règles, l'agent revient parfois sur ses pas et fait tourner un rotor plusieurs fois (trajet vert de l'étape *(8)*). La zone occupée par des agents arrêtés s'étend, mais est de plus en plus arrondie.

par James Propp, du MIT, qui l'a nommé « rotor-router » en 2005. Plusieurs dizaines d'articles scientifiques et plusieurs thèses lui ont été consacrées.

Commençons par le miracle des cercles parfaits avec la version du rotor-router sur un plan quadrillé. Chaque case du quadrillage est reliée à ses voisines nord, sud, est et ouest, ce qui définit un graphe infini où chaque nœud a quatre voisins.

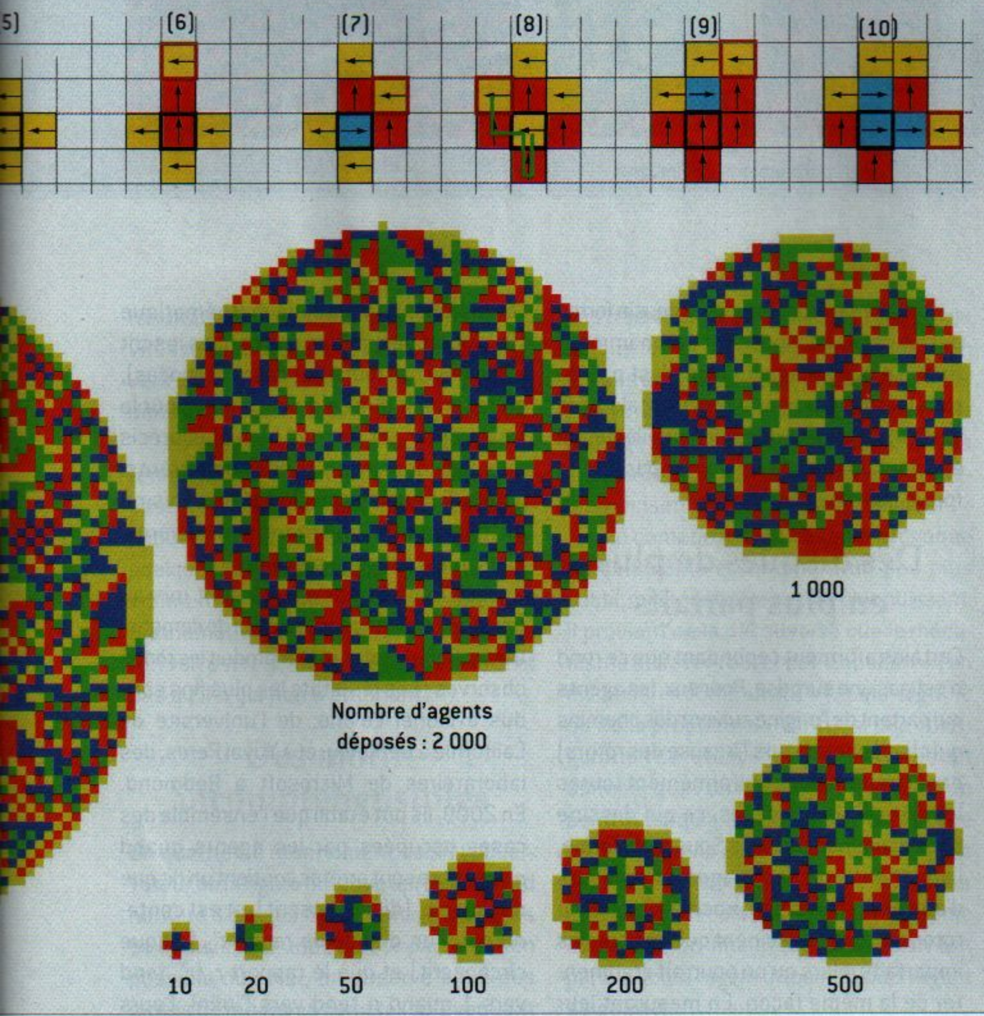
Initialement, il n'y a aucun rotor, et on dépose les uns après les autres des agents sur une case fixe du plan, dénommée case centrale. Dès qu'un agent trouve une case vide, il y dépose un rotor pointant vers l'ouest, lequel occupe la case. Quand la case où arrive un agent est occupée (par un agent et le rotor qu'il a déposé), l'agent fait tourner le rotor et suit la direction alors indiquée. Le premier agent déposé s'arrête donc sur la case centrale, le second sur la case au nord de la case centrale, etc. *(voir l'encadré ci-dessous)*. Petit à petit, des cases du plan sont occupées.

D'un étonnement à l'autre

Ce qu'on voit alors se dérouler suscite de nombreuses surprises (on trouve des programmes pour observer ce processus sur www.cs.uml.edu/ffjpropp/rotor-router-model/#01 ou http://rotor-router.mpi-inf.mpg.de/applet/).

Premier étonnement : jamais un agent ne tourne en rond indéfiniment, tous finissent par trouver une case vide où s'arrêter. La propriété se démontre en effectuant un raisonnement par l'absurde. Supposons qu'un agent se mette à repasser toujours par le même chemin et parcoure donc indéfiniment et périodiquement le même ensemble de cases. L'ensemble des cases de ce circuit est fini et a donc un bord (des cases du circuit adjacentes à des cases n'appartenant pas au circuit). En passant plusieurs fois sur une telle case, l'agent finit par faire pointer le rotor de la

Le rotor-router sur le plan



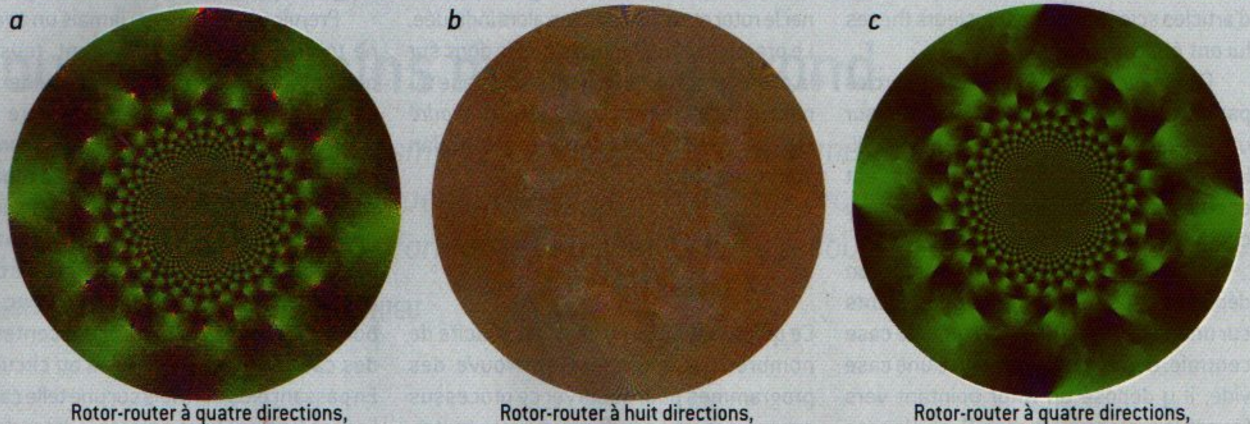
Nombre d'agents déposés : 2 000

On pose successivement des agents mobiles sur la case centrale *(entourée d'un cadre noir)* d'un quadrillage infini du plan. Quand un agent arrive sur une case vide, il y dépose un rotor (une flèche

tournante) en l'orientant vers l'ouest et reste sur la case. Ainsi, le premier agent déposé occupe la case centrale *(1)*. Quand la case sur laquelle arrive un agent est occupée, il fait tourner le rotor de 90° dans le sens horaire et suit la direction alors indiquée en se déplaçant d'une case, où le processus recommence *(la dernière cellule créée est encadrée de rouge)*. Le jaune indique que le rotor pointe vers l'ouest, le rouge vers le nord, le bleu vers l'est, le vert vers le sud. Ainsi, l'agent 2 trouve une case centrale occupée, fait tourner son rotor de 90° qui pointe alors vers le nord et y dépose un rotor jaune *(2)*. L'agent 3 trouve la case centrale occupée par un rotor rouge, le fait tourner pour qu'il devienne bleu et se déplace vers l'est, où il dépose un rotor jaune *(3)*. Etc.

Avec ces règles, l'agent revient parfois sur ses pas et fait tourner un rotor plusieurs fois (trajet vert de l'étape *(8)*). La zone occupée par des agents arrêtés s'étend, mais est de plus en plus arrondie.

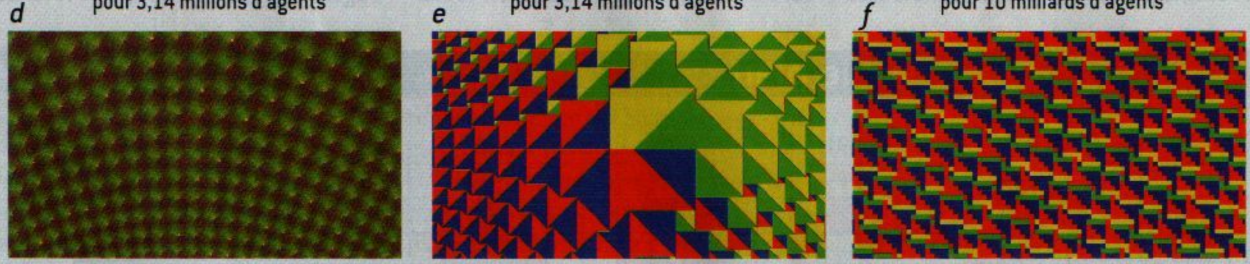
Les moirages



Rotor-router à quatre directions, pour 3,14 millions d'agents

Rotor-router à huit directions, pour 3,14 millions d'agents

Rotor-router à quatre directions, pour 10 milliards d'agents



Agrandissements de l'image *c*

case vers une case n'appartenant pas au circuit, et sort donc du circuit... ce qui est une contradiction.

Deuxième étonnement : jamais aucune case n'est oubliée. Tout le plan se couvre d'agents arrêtés sans qu'il y ait de trou. Cela se démontre encore assez simplement. La case centrale enverra des agents sur ses quatre voisines une infinité de fois, car son rotor tourne à chaque nouvel agent déposé. Chaque case adjacente à la case centrale (nous les nommerons *cases de second niveau*) sera donc visitée une infinité de fois, et donc les rotors qui s'y trouvent tourneront une infinité de fois. Toutes les cases adjacentes à ces cases *(cases de troisième niveau)* seront donc visitées elles aussi une infinité de fois. Il en va de même pour les cases adjacentes à ces cases *(cases de quatrième niveau)*, etc. De proche en proche, toute case du plan est concernée et voit donc passer une infinité d'agents.

Troisième étonnement : le dessin formé par les cases occupées est étonnamment rond. Le quadrillage du plan n'est pas du tout isotrope, puisque l'horizontale et la verticale y jouent des rôles privilégiés ; il est donc inattendu de voir apparaître la forme isotrope d'un disque !

Des disques de plus en plus parfaits

Certains affirment cependant que ce rond n'est pas une surprise. Pour eux, les agents qui partent de l'origine suivent des chemins qui changent toujours (à cause des rotors) et qui traitent donc uniformément toutes les directions possibles, ce qui dessine nécessairement un rond. Sous cette forme, l'argument est assez vague, et d'ailleurs d'autres mécanismes proches de celui du rotor-router ne dessinent que des cercles imparfaits, alors qu'on pourrait argumenter de la même façon. En mesurant leur rotondité par un procédé mathématique (le rapport des rayons des cercles inscrit et circonscrit à toutes les cases occupées), on reconnaît que ce qui se passe pour le rotor-router est un rond bien plus précis que ceux dessinés par ses concurrents. À trois dimensions ou plus, le mécanisme du rotor-router engendre des sphères, elles aussi presque parfaites.

Les mathématiciens se sont mis au travail et on dispose aujourd'hui de démonstrations que le rotor-router produit les ronds observés ! Les résultats les plus fins sont dus à Lionel Levine, de l'université de Californie à Berkeley, et à Yuval Peres, des laboratoires de Microsoft à Redmond. En 2009, ils ont établi que l'ensemble des cases occupées par les agents quand n agents se sont arrêtés contient un disque de rayon r_n (disque inscrit), et est contenu dans un disque de rayon r'_n (disque circonscrit) et que le rapport r_n/r'_n tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Leurs g

Quand on dépose successivement des agents dans la case centrale et qu'ils se déplacent jusqu'à trouver une case vide *(règles indiquées dans l'encadré page 77)*, ils occupent une zone circulaire de plus en plus parfaite. Si les cases sont coloriées en fonction de l'orientation du rotor qui s'y trouve, on observe alors des motifs complexes dont on ne sait pas clairement expliquer la présence, ni même décrire la structure.

Le dessin *(a)* montre ce coloriage pour le rotor-router à quatre directions. Le dessin *(b)* montre le coloriage pour un rotor-router à huit directions (chaque flèche tourne d'un huitième de tour à chaque passage d'agent, ce qui désigne une des huit cases entourant la case).

Les dessins *(a)* et *(b)* ont été réalisés en faisant circuler 3,14 millions d'agents. Le dessin *(c)* a été réalisé avec 10 milliards d'agents (à partir de la page http://rotor-router.mpi-inf.mpg.de/). Il semble mystérieusement être une version plus lisse, mais identique, du dessin *(a)* à 3,14 millions d'agents.

Lorsqu'on grossit le dessin *(c)* obtenu avec 10 milliards d'agents, on observe toutes sortes de structures géométriques aussi régulières qu'inexpliquées *(d, e, f)*.

Quand un graphe infini connexe est donné, qu'on munit chaque nœud d'un rotor et qu'on y dépose un agent, le mécanisme du rotor-router fait qu'il n'existe que deux possibilités : soit l'agent passe une infinité de fois par chaque nœud (cas récurrent), soit il ne passe qu'un nombre fini de fois à chaque nœud (cas transitoire). On montre que pour tout graphe infini connexe, il existe une façon de fixer les positions initiales des rotors de manière à avoir une configuration récurrente.

Pour le dessin *(g)*, on a déposé un rotor dans chaque case du quadrillage du plan au hasard uniformément dans les quatre directions. La figure représente l'ensemble des emplacements par lesquels l'agent est passé quand il s'est déplacé 2 milliards de fois. La couleur d'une case a été choisie en fonction du nombre de fois que l'agent a visité la case : plus la case est éloignée du point de départ, plus ce nombre est petit. On conjecture que la forme de la surface occupée devient de plus en plus ronde (comme dans le cas où des agents sont déposés les uns après les autres au centre et qu'ils s'arrêtent quand ils trouvent une case vide). Mais cette conjecture est considérée très difficile et on ignore comment l'aborder aujourd'hui.

résultats donnent des précisions sur la vitesse avec laquelle le rapport converge vers 1 *(voir l'article de L. Levine et Y. Peres dans la bibliographie)*.

La preuve mathématique justifie et témoigne de l'extraordinaire rotondité observée, pourtant, comme elle est compliquée, il est difficile de formuler en quelques mots des arguments qui éclairent vraiment le mystère de la rotondité. Les mathématiques démontrent que ce que l'on voit est réel, mais ne nous persuadent pas qu'il n'y a rien d'étonnant !

Des motifs incompréhensibles

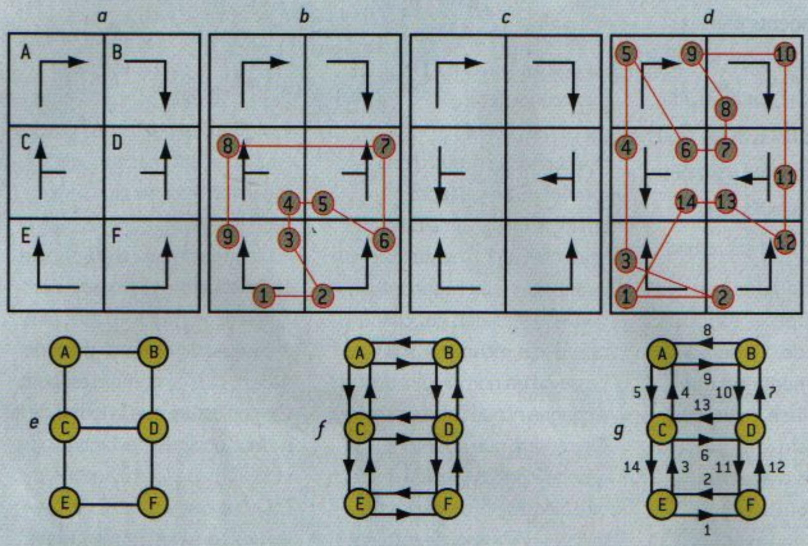
Un quatrième étonnement saisit l'observateur de la figure obtenue après un grand nombre d'étapes. Si l'on colorie les cases en choisissant une couleur par direction possible du rotor, on observe alors des motifs de moirages complexes, évoquant des fractales qui structurent l'intérieur du disque rempli *(voir l'encadré ci-dessus)*. Aucune explication claire de ce phénomène n'a été proposée, et d'ailleurs il est difficile d'imaginer ce que pourrait être une telle explication, puisqu'on ne sait pas formuler précisément ce qui est à expliquer !

Le comportement observé provoque un cinquième étonnement un peu plus subtil, mais peut-être encore plus puissant. Il provient de la découverte que le mécanisme du rotor-router est « abélien » (on dit aussi « commutatif »). Cela signifie qu'il a la propriété suivante : si une configuration de rotors et d'agents arrêtés est donnée, que l'on fait partir un agent d'un point A jusqu'à ce qu'il s'arrête sur une case vide, puis qu'on fait partir un agent d'un point B jusqu'à ce qu'il s'arrête sur une case vide, alors on obtient la même configuration finale que si on avait fait partir d'abord l'agent du point B, puis l'agent du point A.

Une conséquence remarquable de cette commutativité est que si l'on dépose N agents progressivement au point de départ O et qu'on les fait avancer jusqu'à trouver une case vide qu'ils occupent, à chaque fois en attendant que le dernier agent lancé soit arrivé pour faire partir le suivant (procédé conduisant à un disque presque parfait), on arrive exactement à la même configuration que si l'on fait avancer N agents partant de l'origine dans un ordre quelconque sans attendre que chaque agent se soit installé dans une case vide avant d'en faire partir un nouveau.

La raison de s'intéresser au mécanisme du rotor-router sur le plan est qu'il constitue un modèle déterministe de la diffusion centrale : l'étalement à partir d'un point donné d'une série d'effets ou de particules. Si l'on dépose successivement des agents au centre du plan et qu'on leur demande de suivre un chemin aléatoire jusqu'à trouver une case vide, on définit le modèle le

Le miracle des circuits eulériens



Un circuit eulérien sur un graphe orienté (où chaque arête est dotée d'un sens de parcours) est un chemin qui revient à son point de départ en ayant parcouru chaque arête du graphe une fois exactement. Un chemin eulérien passe donc aussi par chaque nœud du graphe.

De façon presque magique, le rotor-router découvre automatiquement et rapidement de tels circuits eulériens. Considérons par exemple six cases d'un quadrillage formant un rectangle 2 × 3 (*a*). Chaque case est reliée à ses voisines des quatre points cardinaux quand elles existent. Cela détermine un graphe non orienté (*e*) auquel on associe un graphe orienté (*f*) en dédoublant chaque arête. D'après le théorème d'Euler, un tel graphe possède des circuits eulériens. Nous allons utiliser un rotor-router pour en découvrir un.

Posons un rotor dans chaque case. La case A est par exemple munie d'un rotor à deux positions, puisqu'elle est reliée à deux autres cases (B et C). Orientons les rotors en prenant la première direction disponible à partir de la position nord en tournant dans le sens horaire. Les six rotors et leurs directions initiales sont dessinés en *(a)*. On pose un agent dans la case E, et on le laisse faire selon la règle de fonctionnement des rotor-routers : l'agent fait tourner le rotor de la case dans lequel il se trouve, et suit la direction qu'il indique alors, et recommence dans la nouvelle case. Le parcours de l'agent suit le chemin indiqué en (*b*) : EFECDFDCE.

Il revient donc dans la case E sans être passé partout. C'est la phase d'initialisation. Les rotors ont changé de direction et sont maintenant dans les orientations indiquées par le dessin (*c*). L'agent reprend son cheminement et, cette fois en 14 étapes, revient en E après avoir parcouru un chemin eulérien. À l'issue de ce parcours, il a remis tous les rotors comme ils l'étaient en *(c)* : il reprendra donc indéfiniment le chemin eulérien découvert (représenté en (*d*) et en (*g*)).

Ce qui se produit ici est général. Quel que soit le graphe non orienté initial, un agent sans mémoire, grâce au système des rotors, finit toujours par découvrir un circuit eulérien du graphe orienté associé, qu'il parcourt alors indéfiniment. Cette méthode permet à un amnésique de sortir d'un labyrinthe quelle que soit sa complexité, pourvu qu'il dispose d'une craie pour dessiner l'équivalent des rotors à chaque carrefour.

plus classique de diffusion centrale nommé IDLA (*Internal Diffusion-Limited Aggregation*, ou agrégation interne limitée par la diffusion) introduit en 1992. Les chemins aléatoires peuvent être conçus de plusieurs façons, mais la plus simple consiste pour chaque pas fait par l'agent à lancer un dé à quatre faces et, selon le résultat, à faire se déplacer l'agent d'une case vers le nord, le sud, l'est ou l'ouest.

James Propp présente le rotor-router comme une « dérandomisation » du modèle classique de diffusion centrale, c'est-à-dire comme un modèle aussi proche que possible du modèle IDLA, mais ne dépendant plus du hasard. Bien que déterministe, le modèle du rotor-router a de nombreuses propriétés communes avec le modèle aléatoire, et sous une forme plus nette. Par exemple, dans le modèle aléatoire IDLA, on observe temporairement des trous dans la forme circulaire construite par les agents arrêtés. Ce n'est jamais le cas avec le rotor-router. Autre exemple : la frontière de l'ensemble des cases occupées, dont on démontre aussi qu'elle devient de plus en plus ronde dans le modèle aléatoire, est bien plus lisse avec le rotor-router.

Patrouilles sur un graphe

Le mécanisme du rotor-router a une capacité étonnante à parcourir efficacement un graphe quelconque. On se donne un graphe G non orienté (on ne précise aucun sens de parcours pour les arêtes) à nombre fini de nœuds et d'arêtes. Chaque nœud est muni d'un rotor. On suppose que le graphe est connexe : quels que soient les nœuds A et B du graphe, il existe un chemin allant de A à B. En un nœud quelconque, on pose un agent unique qui se met à suivre les indications des rotors sans jamais s'arrêter, en les faisant tourner à chaque fois qu'il passe. Ce qui se produit est là encore tout à fait remarquable.

Quels que soient le graphe, la position initiale des rotors et l'endroit d'où part l'agent, il visitera chaque nœud une infinité de fois sans en oublier aucun. Pour le démontrer, on note qu'il existe nécessairement un nœud N du graphe qui est visité une infinité de fois. On raisonne alors comme pour notre « premier étonnement » à propos du rotor-router sur le plan : les nœuds voisins de N voient aussi passer l'agent une infinité de fois, de même que les voisins des voisins de N, etc.

Plus étonnant et même franchement miraculeux : après une période d'errance, l'agent entre dans un parcours cyclique qui est un parcours eulérien du graphe orienté G' associé à G. Précisons ici ce que sont les parcours eulériens de G'. Le graphe que nous avons considéré a des arêtes non orientées. Si l'on remplace chacune des arêtes de G par deux arêtes orientées, une pour chaque sens de parcours, cela donne un graphe G' orienté associé à G. Un parcours eulérien du graphe G' est alors un chemin qui emprunte chaque arête orientée une fois exactement. Ce chemin empruntera donc chaque arête du graphe G deux fois exactement.

Un parcours eulérien pour sortir de tout labyrinthe

Le théorème d'Euler indique que si un graphe orienté connexe est tel que chaque nœud a autant d'arcs arrivant sur lui que d'arcs qui en sortent, alors il existe nécessairement un parcours eulérien du graphe. Ici, le graphe G' a la propriété demandée (car chaque arc non orienté de G a donné deux arcs orientés opposés dans G'). Il n'y a donc pas de surprise à ce qu'un tel parcours eulérien de G' existe. En revanche, que l'agent posé n'importe où en trouve un tout seul, simplement parce qu'il utilise les rotors du graphe, est inattendu. L'agent n'a aucune mémoire propre, et pourtant il réalise une tâche qui semble exiger de se souvenir de ce que l'on fait et d'avoir une vision globale du graphe *(voir l'encadré page précédente)* !

Ce résultat fournit à un agent sans aucune mémoire une méthode sûre pour parcourir entièrement un graphe. Concrètement, cela vous indique un procédé pour sortir d'un labyrinthe, aussi compliqué soit-il... si vous disposez d'une craie. En effet :

– À chaque fois que vous passez dans un carrefour du labyrinthe, vous dessinez au centre du carrefour une flèche que vous faites tourner à chaque passage (vous effacez la précédente, et vous dessinez une nouvelle flèche pointant vers la branche suivante du carrefour dont, lors du premier passage, vous avez numéroté les branches). Cette flèche joue le rôle d'un rotor. Même si vous êtes totalement amnésique, vous serez assuré de parcourir tout le labyrinthe et donc d'en trouver la sortie... ou le trésor.

Terminons en mentionnant quelques jolis résultats obtenus sur le problème de la patrouille sur un graphe infini connexe.

Supposons un graphe (non orienté) infini et connexe (par exemple celui associé au quadrillage infini du plan). On a fixé des rotors en chaque nœud (ou case) et déposé un agent en un nœud N. L'agent se déplace indéfiniment sur le graphe en faisant tourner les rotors. Deux cas seulement sont possibles : soit chaque nœud est visité une infinité de fois (cas dit récurrent), soit aucun nœud n'est visité une infinité de fois (cas transitoire).

La démonstration s'appuie à nouveau sur l'idée que si un nœud est visité une infinité de fois, il en est de même de ses voisins, donc des voisins de ses voisins, etc. Plus inattendus sont les résultats suivants :

– Si un graphe infini connexe est donné ainsi qu'une configuration des rotors, et qu'en déposant un agent en un nœud N, on se trouve dans le cas récurrent, alors en déposant l'agent n'importe où, on se trouvera aussi dans le cas récurrent.

– Quand on considère le graphe du quadrillage (chaque case est reliée à ses quatre voisines nord, sud, est et ouest) ou sa généralisation en dimension k ($k > 2$), il existe des configurations initiales des rotors qui produisent le cas récurrent.

– Pour tout graphe infini connexe, il existe une façon de fixer les positions initiales des rotors de manière à avoir une configuration récurrente.

Le simplissime mécanisme du rotor-router n'a pas encore livré tous ses secrets. Il occupera encore un bon moment mathématiciens et informaticiens. ■

■ LES AUTEURS

Jean-Paul DELAHAYE et Philippe MATHIEU sont professeurs à l'université de Lille et chercheurs au laboratoire CRISTAL (Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille).

■ BIBLIOGRAPHIE

A. Kosowski et D. Pajak, **Does adding more agents make a difference ? A case study of cover time for the rotor-router,** *Automata, Languages and Programming,* LNCS 8573, Springer, pp. 544-555, 2014.

D. Dereniowski *et al.*, **Bounds on the cover time of parallel rotor walks,** *STACS 2014*, pp. 263-275, 2014.

L. Florescu *et al.*, **The range of a rotor walk,** prépublication arXiv:1408.5533, 2014.

O. Angel et A. Holroyd, **Rotor walks on general trees,** *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, vol. 25(1), pp. 423-446, 2011.

Références supplémentaires sur www.pourlascience.fr