

Outils logiques et algorithmiques – TD 1 – Spécifications et invariants

Exercice 1 (Raisonnements corrects et incorrects) Une mère dit à son fils : « s'il pleut, tu ne sors pas ». Ce que dit la mère est vrai.

1. S'il ne pleut pas, peut-on en déduire que le fils sort ?
2. Le fils sort, peut-on en déduire qu'il ne pleut pas ?
3. Le fils ne sort pas, peut-on en déduire qu'il pleut ?

Bonus, entendu dans un reportage :

4. « Ce pleur de faim est commun à tous les enfants du monde. La preuve avec le petit Paul, 1 mois. »

□

Exercice 2 (Formalisation) On se donne les prédicats suivants qui parlent de personnes et d'aliments :

$\text{aime}(x, y)$ x aime l'aliment y
 $\text{mange}(x, y)$ x mange l'aliment y
 $x = y$ x et y sont égaux

ainsi qu'une constante moi qui représente la personne qui parle et une constante cdb représentant les choux de bruxelles.

1. Traduire les formules suivantes en langage naturel
 - (a) $\forall x, \exists y, \text{mange}(x, y)$
 - (b) $\exists y, \forall x, \text{mange}(x, y)$
 - (c) $\exists x, \forall y, \text{mange}(x, y)$
 - (d) $\forall x \forall y \forall z, \text{aime}(x, y) \wedge \text{aime}(x, z) \implies (y = z)$
2. Exprimer par des formules logiques sur le langage précédent les propositions suivantes
 - (a) J'aime tout ce que je mange
 - (b) Je mange tout ce que j'aime
 - (c) Je n'aime pas les choux de bruxelles, mais j'en mange
 - (d) Si j'aime les choux de bruxelles, alors je mange de tout
 - (e) Je ne mange que des choux de bruxelles
3. Les formules 2a et 2b sont-elles équivalentes ?
4. On suppose la formule 2c vraie, peut-on en déduire que 2d est vraie ?

□

Exercice 3 (Carré) L'algorithme suivant calcule le carré d'un nombre entier à l'aide exclusivement d'additions et de multiplications par 2.

```
static int square(int n) {  
    int r = 0;  
    int i = 0;  
    while (i < n) {  
        r += 2*i + 1;  
        i++;  
    }  
    return r;  
}
```

1. Donner une spécification pour cet algorithme, en précisant à l'aide d'une précondition pour quels entiers il fonctionne effectivement.
2. Donner un invariant pour la boucle, sous la forme d'une relation entre les valeurs de i et r .

□

Exercise 4 (Palindromes) L'algorithme suivant vérifie si une chaîne *s* forme un palindrome, c'est-à-dire si la séquence de caractères lue de gauche à droite est égale à la séquence de caractères lue de droite à gauche. Exemples : "1001001" est un palindrome, mais "Chuck_Norris" n'est pas un palindrome.

```
static boolean palindrome(String s) {
    int i = 0;
    int j = s.length() - 1;
    while (i < j) {
        if (s.charAt(i) != s.charAt(j)) return false;
        i++;
        j--;
    }
    return true;
}
```

1. Donner une spécification de la notion de palindrome.
2. Donner un invariant pour la boucle.

□

Exercise 5 (Minimum) Voici le code pour un algorithme simple de recherche d'un élément minimal dans un tableau.

```
static int minimum(int[] t) {
    assert (t.length > 0);
    int m = t[0];
    for (int i=0; i < t.length; i++) {
        if (t[i] < m)
            m = t[i];
    }
    return m;
}
```

1. Manifestement, le programmeur a tenu à rendre explicite une précondition. Quelle est-elle ?
2. Donner une spécification pour la recherche de minimum.
3. Donner un invariant pour la boucle.
4. Proposer une spécification différente, qui admettrait un tableau arbitraire en entrée (*i.e.* sans précondition).

□

Exercise 6 (Plus longues séquences) La fonction suivante cherche dans une chaîne la longueur maximale d'une séquence répétant un même caractère.

```
static int longestRepetition(String s) {
    int i = 0, r = 0;
    while (i < s.length()) {
        int k = 1;
        while (i+k < s.length() && s.charAt(i+k) == s.charAt(i))
            k++;
        if (k > r)
            r = k;
        i += k;
    }
    return r;
}
```

1. Donner une spécification du problème.
2. Donner des invariants pour les deux boucles.

□