Outils logiques et algorithmiques – TD 3 – Graphes

Exercice 1 (Degrés des sommets d'un graphe) Soit un graphe G fini non orienté avec n sommets et k arêtes.

1. Exprimer la somme des degrés des sommets en fonction du nombre d'arêtes.
2. Soit Δ le plus grand degré parmi les sommets du graphe, montrer que $\Delta \leq 2k$ et donner un exemple pour lequel on a $\Delta = 2k$.
3. On suppose maintenant que G est un graphe simple (sans boucle ni arête multiple).
   (a) Donner une borne sur le nombre d'arêtes en fonction du nombre de sommets et un exemple pour lequel cette borne est atteinte.
   (b) Montrer que $\Delta \leq n-1$ et donner un exemple pour lequel on a $\Delta = n-1$.

□

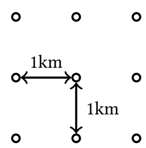
Exercice 2 (Cliques) Une clique est un graphe dont tous les sommets différents sont reliés par exactement une arête. On note K_n la clique qui a n sommets.

1. Dessiner les graphes K_2, K_3, K_4 et K_5.
2. Combien y a-t-il d'arêtes dans K_n ?
3. Combien de couleurs sont-elles nécessaires pour colorier K_n ?
4. Montrer que le graphe K_4 est planaire (il peut être dessiné sans que les arêtes ne se croisent).
5. A votre avis, le graphe K_5 est-il planaire ?

□

Exercice 3 (Allocation de fréquences) Les communications sans-fils posent des problèmes d'interférence. Pour éviter ce problème, deux émetteurs qui sont actifs dans la même zone géographique doivent utiliser des fréquences différentes. On se donne un ensemble d'émetteurs E, on connait la distance $d(e_1, e_2)$ entre deux émetteurs e_1 et e_2 et on sait que si cette distance est supérieure à N alors les deux émetteurs ne seront pas actifs sur la même zone. On veut attribuer une fréquence à chaque émetteur, en utilisant le moins possible de fréquences mais sans provoquer d'interférence.

1. Montrer qu'attribuer les fréquences se ramène à un problème de coloriage de graphe, c'est-à-dire à l'attribution d'une couleur à chaque sommet d'un graphe non-orienté, de sorte que deux sommets adjacents n'aient jamais la même couleur. Préciser la définition du graphe (sommets, arêtes) et la signification des couleurs.
2. On a neuf émetteurs disposés en carré sur une grille. La distance entre deux émetteurs consécutifs horizontalement ou verticalement est de 1km.



   Les émetteurs ont une portée maximale de 900m. En conséquence, deux émetteurs distants de plus de 1,8km ne sont pas actifs au même endroit.

   (a) Dessiner le graphe permettant l'attribution des fréquences sans interférence.
   (b) Quel est le degré maximal d'un sommet de ce graphe ?
   (c) Quel nombre minimal de couleurs est nécessaire pour le colorier ?
   (d) Proposer un coloriage qui utilise le nombre minimal de couleurs (on utilisera des entiers pour représenter les couleurs).

□

Exercice 4 (Coloriages) Pour un graphe G simple quelconque, notons $\Delta(G)$ son degré maximal, c'est-à-dire le plus grand degré de ses sommets. On veut comparer $\Delta(G)$ et le nombre de couleurs nécessaires pour colorer les sommets du graphe.

1. Donner un graphe G tel que $\Delta(G) = 6$, dont les sommets peuvent être coloriés avec seulement deux couleurs.
2. Donner un graphe G tel que $\Delta(G) = 3$, dont les sommets ne peuvent pas être coloriés avec seulement trois couleurs.
3. Considérons un *cycle* à n sommets, c'est-à-dire un graphe G à n sommets $\{s_0, \ldots, s_{n-1}\}$, dans lequel on a une arête entre s_i et s_{i+1} pour chaque $i \in [0, n-1[$, et une arête de s_{n-1} à s_0. Dessiner des cycles à 5 sommets à 6 sommets, puis montrer qu'un cycle peut être colorié avec deux couleurs si et seulement si sa taille est paire.
4. Démontrer par récurrence sur n qu'un graphe G à n sommets peut être coloré en n'utilisant pas plus que $\Delta(G) + 1$ couleurs.
5. Montrer sur un exemple que l'algorithme de coloriage glouton vu en cours ne donne pas toujours le nombre minimum de couleurs.

□

Exercice 5 (Coloriage d'arêtes) On cherche à planifier les matchs d'un tournoi auquel participent n joueurs. On construit un graphe dont les sommets sont les joueurs, chaque match est représenté par une arête entre les deux joueurs qu'il oppose.

1. Planifier les matchs dans le temps se ramène à associer une couleur à chaque arête. Exprimer quelle condition doit vérifier ce coloriage pour que les matchs puissent se jouer sans conflit.
2. Donner une borne inférieure sur le nombre de couleurs nécessaires en fonction des caractéristiques du graphe.
3. On se place maintenant dans le cas où chaque joueur doit rencontrer chaque autre joueur exactement une fois.
   (a) Reconnaissez-vous le graphe correspondant ? Combien a-t-il d'arêtes ?
   (b) Quel est le nombre maximal de matchs qui peuvent avoir lieu en même temps ?
   (c) Proposez des coloriages qui conviennent pour $n = 4$ et $n = 5$.

□