

Outils logiques et algorithmiques – TD 6 – Composantes connexes

Exercice 1 (Vrai ou faux?)

1. Soit G un graphe non-orienté, la relation $\text{path}(x, y)$ qui est vraie s'il existe un chemin de x à y dans G est une relation d'équivalence.
2. Soit G un graphe orienté, la relation $\text{path}(x, y)$ qui est vraie s'il existe un chemin de x à y dans G est une relation d'équivalence.

□

Exercice 2 (Relations d'équivalence)

1. Soit $f : A \rightarrow B$ une fonction. On définit une relation binaire R sur l'ensemble A par : xRy si et seulement si $f(x) = f(y)$. Montrer que R est une relation d'équivalence. Comment caractériser ses classes d'équivalence?
2. Montrer que la relation $\subseteq$ n'est pas une relation d'équivalence.

□

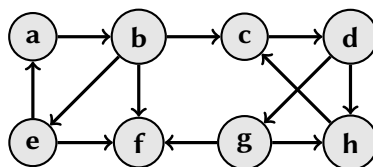
Exercice 3 (Composantes connexes) La composante connexe d'un sommet a dans un graphe non orienté G est définie comme l'ensemble des points b tels qu'il existe un chemin (éventuellement vide) de a à b . Elle est notée $C_G(a)$.

1. Montrer que l'ensemble des composantes connexes forme une partition de l'ensemble des sommets :
 - chaque composante est non vide
 - tout sommet appartient à une composante
 - deux composantes sont soit disjointes, soit égales
2. Quel est le nombre maximal de composantes connexes dans un graphe en fonction du nombre de sommets, le nombre minimal?
3. On suppose que le graphe G est acyclique et a k composantes connexes. Soient deux sommets a et b de G et le graphe G' qui est le même que G avec une arête de plus qui a pour extrémités $\{a, b\}$. Montrer que soit G' contient un cycle, soit G' a $k - 1$ composantes connexes.
4. En déduire qu'un graphe acyclique à n sommets a au plus $n - 1$ arêtes.

□

Exercice 4 (Composantes fortement connexes) Étant donné un graphe G orienté, la *composante fortement connexe* $C(s)$ d'un sommet s de G est l'ensemble des sommets s' de G tels qu'il existe dans G un chemin de s à s' et un chemin de s' à s .

1. Identifier les composantes fortement connexes du graphe suivant.



2. Démontrer que si s_1 et s_2 appartiennent tous deux à la composante fortement connexe d'un même sommet s , alors il existe un chemin de s_1 vers s_2 .

On définit le *graphe des composantes* $C(G)$ d'un graphe orienté G comme suit :

- les sommets de $C(G)$ sont les composantes fortement connexes de G ,
 - il y a un arc de $C(G)$ du sommet C_1 vers le sommet C_2 si et seulement s'il existe dans G : un sommet s_1 dans la composante C_1 , un sommet s_2 dans la composante C_2 , un arc de s_1 à s_2 .
3. Donner le graphe des composantes du graphe donné en exemple à la question 1.

4. Soit un graphe G et son graphe des composantes $C(G)$. Démontrer par récurrence que pour tout k , s'il existe un chemin de longueur k dans $C(G)$ d'un sommet C_1 à un sommet C_2 , alors pour tous sommets s_1, s_2 de G tels que $s_1 \in C_1$ et $s_2 \in C_2$, il existe dans G un chemin de s_1 à s_2 de longueur supérieure ou égale à k .
5. Démontrer qu'un graphe des composantes est toujours acyclique.

□

Exercice 5 (Ordre et équivalence) On se donne un ensemble A et une relation R sur A qui est réflexive et transitive. On introduit la relation E définie par $E(x, y) \equiv R(x, y) \wedge R(y, x)$

1. Montrer que E est une relation d'équivalence. On appelle A/E l'ensemble des classes d'équivalence de A pour la relation E . Montrer que pour tout $X \in A/E$ on a $\forall x, y \in X, R(x, y)$.
2. Soit $A = \{a, b, c, d\}$ et R la relation telle que $R(a, a), R(b, b), R(c, c), R(d, d), R(a, b), R(b, a), R(b, c), R(a, c)$. Définir la relation E et donner les classes d'équivalence correspondantes.
3. On introduit la relation R_E sur A/E par $R_E(X, Y) \equiv \exists x \in X, \exists y \in Y, R(x, y)$.
 - (a) Montrer que $R_E(X, Y) \iff \forall x \in X, \forall y \in Y, R(x, y)$.
 - (b) Montrer que R_E est une relation d'ordre sur A/E .
 - (c) Construire la relation R_E sur l'exemple de relation de la question précédente.

□