Chapitre 4

Coloration de graphes

Dans ce chapitre, nous discutons des différentes colorations de graphes et des problèmes de complexité associés. Nous nous focalisons essentiellement sur la b-coloration et la f-coloration, et aux nombres chromatiques associés.

La première section correspond à une introduction aux problèmes de coloration, en rappelant ce qui est connu sur les colorations classiques. Nous présentons dans la deuxième section la a-coloration et le théorème d'interpolation associé. Nous présentons alors dans la troisième section la b-coloration, et quelques résultats sur la structure des b-spectres. Dans la quatrième section, nous présentons la f-coloration et un certain nombre de résultats négatifs.

Je présente au travers de ces discussions quelques résultats personnels, essentiellement à propos de la b-coloration et de la f-coloration. Nous avons ainsi prouvé d'une part que pour tout ensemble d'entiers, il existe un graphe de b-spectre ou f-spectre associé. Nous avons d'autre part caractérisé la complexité des problèmes de décision et d'approximation associés, en prouvant par exemple la non-approximabilité des nombres chromatiques correspondants.

Les travaux présentés dans ce chapitre ont été obtenus en collaboration avec l'étudiant en thèse Taoufik Faik.

4.1 Introduction

Des applications comme l'ordonnancement de tâches, l'allocation de fréquences, l'allocations de registres, de répartition de services dans les réseaux peuvent être modélisées comme un problème de coloration de graphes. Une *coloration propre* d'un graphe G est une fonction associant à tout sommet V du graphe G un entier représentant une couleur dans $[1, \ldots, |V|]$, telle que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.

Le problème d'optimisation classique est de trouver une coloration avec un nombre de couleurs minimum. Le *nombre chromatique* correspond à ce nombre minimal.

Définition 13 (Nombre chromatique) *Le* nombre chromatique *d'un graphe G (noté $\chi(G)$) est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour lui donner une coloration propre.*

Le problème de décision lié à ce nombre (déterminer si $\chi(G) \leq k$) est connu pour être NP-complet [Garey and Johnson, 1979]. Malheureusement, pour un graphe général, le nombre chromatique $\chi(G)$ ne peut pas être approximé avec un facteur multiplicatif $|V|^{1-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$ [Zuckerman, 2007] sauf si $P = NP$. L'article [Zuckerman, 2007] est une extension des résultats de [Feige and Kilian, 1998] et de [Håstad, 1997].

On peut considérer un algorithme glouton qui affecte une couleur d'indice la plus petite possible à un sommet v en fonction des voisins déjà coloriés suivant l'ordre donné par une liste des sommets de G arbitraire. En fait, cet algorithme retourne une coloration ayant un nombre de couleurs au plus $\Delta(G) + 1$. Il est à noter que cet algorithme donne une coloration optimale pour les graphes d'intervalle si la liste des sommets est ordonnée en fonction de l'ordre *reo* ou *leo*.

De plus une borne classique sur le nombre chromatique est la suivante [Brooks, 1941].

Théorème 12 ([Brooks, 1941]) *Pour tout graphe G de degré maximum $\Delta(G)$, on a $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

A partir de ce résultat, de nombreux algorithmes d'approximation ont été développés (voir [Paschos, 2003] pour un survol des résultats connus pour ce problème). Mais, il faut souligner que le fait de connaître des propriétés supplémentaires sur le graphe permet d'améliorer le facteur d'approximation. En effet, par exemple, le problème de trouver le nombre chromatique est approximable à un facteur multiplicatif $O(|V|^{3/14} \log^{O(1)} |V|)$ si le graphe possède une coloration propre de 3 couleurs (c'est-à-dire un graphe 3-coloriable) [Blum, 1994].

Suite à l'étude de cette coloration, d'autres colorations ont été introduites comme la a-coloration, la b-coloration, la f-coloration, ...

4.2 A propos de la a-coloration.

Définition 14 *Une a-*coloration *est une coloration propre de sommets telle que chaque paire de couleurs possède des sommets adjacents.*

Le nombre *a-chromatique* d'un graphe G noté $\Psi(G)$ est le nombre maximum de couleurs pour lequel G possède une a-coloration. Par exemple dans un graphe biparti complet moins un couplage parfait $K'_{n,n}$, le nombre a-chromatique est n c'est-à-dire la taille de la bipartition (voir la figure 4.2 pour visualiser la a-coloration ayant un nombre de couleurs maximum).

Le problème de déterminer si $\Psi(G) \geq k$ est NP-complet [Yannakakis and Gavril, 1980], même pour les arbres [Cairnie and Keith, 1997], les graphes d'intervalles et les co-graphes [Bodlaender, 1989]. Suite à ces résultats de complexité, des algorithmes d'approximation ont été proposés : par exemple une approximation à facteur 2 pour les arbres [Krysta and Loryś, 2006], et une approximation à facteur $O(n \log\log n / \log n)$ pour les graphes en général [Kortsarz and Krauthgamer, 2001].

Des propriétés sur le nombre a-chromatique ont été étudiées, notamment :

Théorème 13 (Homomorphism Interpolation Theorem [Harary et al., 1967]) *Pour tout graphe G, et pour tout entier k tel que $\chi(G) \leq k \leq \Psi(G)$, il existe une a-coloration de k couleurs.*

Cette notion d'interpolation a été étudiée pour différents paramètres (voir [Harary, 1983] pour un récapitulatif).

A partir de cette coloration, et du précédent théorème, d'autres types de coloration ont été introduites comme la b-coloration [Irving and Manlove, 1999], puis la f-coloration [Dunbar et al., 2000]. Les travaux sur des colorations de sommets non-classiques ont été initiés par la constatation de [Kratochvíl et al., 2002] qu'une coloration propre de sommets à c couleurs d'un graphe peut se transformer en une coloration utilisant $c+1$ couleurs : il suffit simplement de colorier un sommet ayant une couleur en une autre couleur distincte. Par contre dès que l'on impose une propriété supplémentaire sur la coloration, il est difficile de transformer une coloration de c couleurs en une autre de $c+1$ couleurs en conservant la propriété, comme nous allons le voir.

4.3 A propos de la b-coloration.

Définition 15 *Une* b-coloration *est une coloration propre de sommets telle que pour chaque couleur, il existe un sommet de cette couleur qui est voisin de sommets de toutes les autres couleurs.*

Tout graphe possède une b-coloration : toute coloration ayant un nombre minimal de couleurs est une b-coloration. En effet, considérons une coloration ayant un nombre minimal de couleurs. Pour chaque couleur, si aucun de ses sommets est le voisin de sommets de toutes les autres couleurs, alors il suffirait de le colorier dans une couleur non présente dans son voisinage.

Pour une couleur c, le sommet v est un *sommet b-chromatique* pour la couleur c s'il est de couleur c et qu'il est le voisin de sommets de toutes les autres couleurs. On appelle nombre b-chromatique le nombre maximum de couleurs pour lequel un graphe admet une b-coloration.

Le concept de b-coloration a été introduit dans [Irving and Manlove, 1999]. Déterminer le nombre $\phi_b(G)$ est NP-complet en général [Irving and Manlove, 1999] même si le graphe est biparti [Kratochvíl et al., 2002]. De plus, dans [Corteel et al., 2005], il a été prouvé que si $P \neq NP$, il n'existe pas de constante $\epsilon > 0$ pour laquelle calculer $\phi_b(G)$ peut être approximé à un facteur multiplicatif de $120/133 - \epsilon$ en temps polynomial. De plus, [Kouider and Zaker, 2006] ont donné des bornes de $\phi_b(G)$ en fonction du nombre de cliques.

Par contre, ce problème devient polynomial pour les arbres [Irving and Manlove, 1999], pour les co-graphes [Bonomo et al., 2009], et pour certains graphes de Kneser [Javadi and Omoomi, 2009]. Par contre, il est surprenant que cette question reste encore ouverte pour les graphes d'intervalle, et pour les graphes triangulés.

Contrairement, à la coloration classique, la b-coloration de c couleurs d'un graphe n'implique pas une de $c+1$ couleurs. En effet, l'hypercube de dimension 3 illustre cette remarque (voir figure 4.1). Il admet deux b-colorations : une de 2 couleurs et une de 4 couleurs puisqu'il est aussi un graphe biparti complet de 8 sommets privé d'un couplage parfait. Par contre, il est facile de vérifier qu'il n'admet pas de b-coloration de trois couleurs.

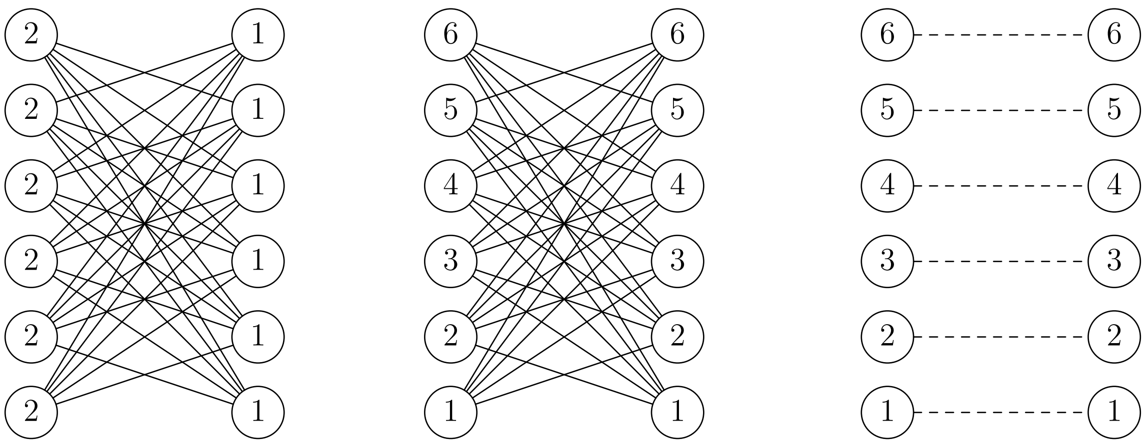
Ce simple exemple n'est pas une exception. En effet, nous nous sommes intéressées à la notion de b-spectre d'un graphe dans [6].

b-coloration de 2 couleurs $\qquad$ b-coloration de 4 couleurs

FIG. 4.1 – hypercube et ses deux b-colorations

Définition 16 *Un* b-spectre *d'un graphe G correspond à l'ensemble des entiers k pour lesquels G admet une b-coloration avec k couleurs.*

Dans [6], nous avons prouvé que tout ensemble I correspond à un graphe G ayant I comme b-spectre. Pour cela, pour tout ensemble $I \subset (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})$ avec $\min(I) = 2$, un graphe G a été construit dont le b-spectre $S_b(G)$ est I. Cette construction du graphe G se base principalement sur les graphes bipartis complets moins un couplage parfait. En effet, nous considérons trois cas, en fonction du nombre d'éléments de I.
Cas 1 : Pour $I = \{2\}$, il suffit de prendre G qui correspond à une seule arête ou un graphe biparti complet.
Cas 2 : Pour $I = \{2, n\}$, le graphe biparti complet moins un couplage parfait $K'_{n,n}$ a deux b-colorations de couleurs 2 et n (voir figure 4.2).



b-coloration de 2 couleurs $\qquad$ b-coloration de 6 couleurs $\qquad$ arêtes n'étant pas dans $K'_{6,6}$

FIG. 4.2 – le graphe $K'_{6,6}$ et ses deux b-colorations

Cas 3 : Pour $I = \{2, n_1, \ldots, n_p\}$, avec $2 < n_1 < \ldots < n_p$ et $p \geq 2$, le graphe ayant I comme b-spectre est un graphe biparti avec n_p ensembles stables de sommets défini comme suit $G = (\cup_{i=0}^{p} V_i, \cup_{i=1}^{p} E_i)$ avec (voir la figure 4.3) :

1. $V_0 = \{v_0^1, \ldots, v_0^{n_p}\}$, $V_p = \{v_p^1, \ldots, v_p^{n_p}\}$,
2. $\forall i \in \{1, \ldots, p-1\}$, $V_i = \{v_i^1, \ldots, v_i^{n_i - 1}\}$,
3. $\forall \ell, j$, avec $1 \leq j \leq n_p$ et $1 \leq \ell \leq n_p$, $[v_0^\ell, v_p^j] \in E_p \Leftrightarrow (\ell \neq j)$

4. $\forall i \in \{1, \ldots, p-1\}$, $\forall \ell, j$, avec $2 \leq j \leq n_i - 1$ et $1 \leq \ell \leq n_p$, $[v_0^\ell, v_i^j] \in E_i \Leftrightarrow (\ell \neq j)$
5. $\forall i \in \{1, \ldots, p-1\}$, $\forall \ell$, $[v_0^\ell, v_i^1] \in E_i \Leftrightarrow (2 \leq \ell \leq n_i - 1)$

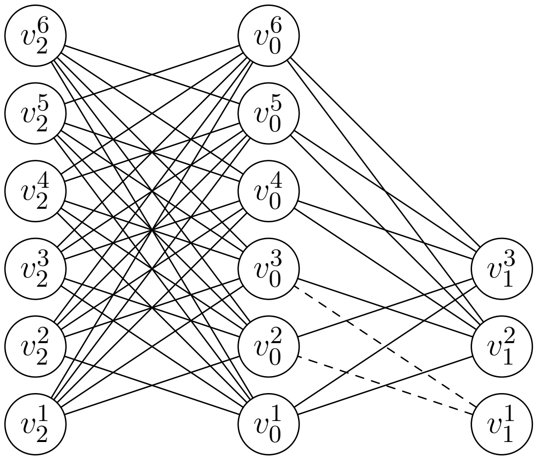
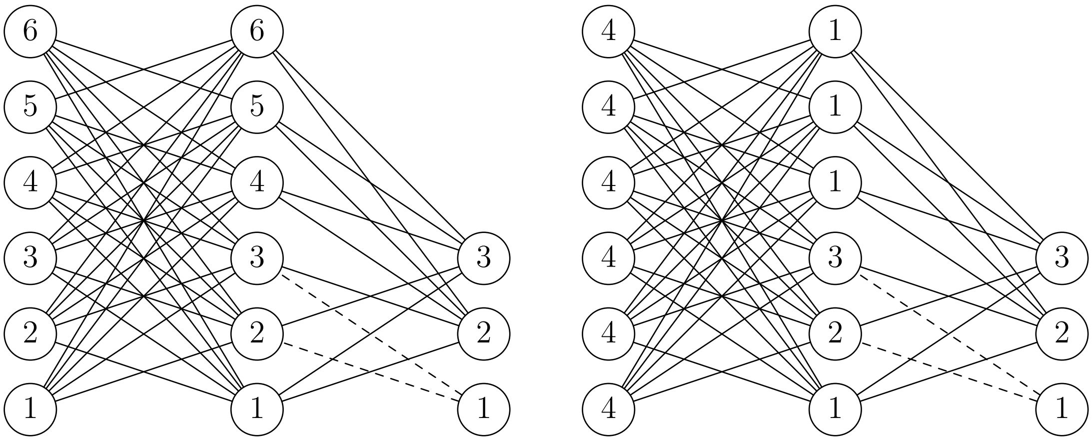


FIG. 4.3 – Un graphe avec le b-spectre $\{2, 4, 6\}$

Pour construire une b-coloration ayant n_k couleurs, il faut tout d'abord donner la couleur i pour tous les sommets $v_{n_k}^i$ et v_0^i, pour $i \in [1, \ldots, n_k - 1]$. Ensuite, les sommets v_0^i, ont la couleur 1 pour $i \in [n_k, \ldots, n_p]$ et tous les autres sommets sont de couleur n_k. La figure 4.4 montre les différentes b-colorations du graphe aussi donné.

L'idée principale de cette construction est de rendre b-chromatique tous les sommets de V_0. Pour réaliser cela, et notamment pour des b-colorations ayant un nombre inférieur à n_k, l'astuce est que les sommets $\{v_1^1, \ldots, v_{n-k-1}^1\}$ ne sont pas adjacents à tous les sommets de V_0 afin que plusieurs sommets de V_0 auront la possibilité d'avoir la même couleur.

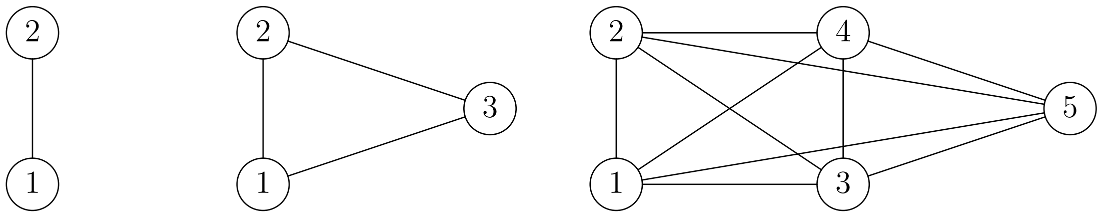


b-coloration de 6 couleurs

b-coloration de 4 couleurs

FIG. 4.4 – Un graphe avec le b-spectre $\{2, 4, 6\}$ et ses b-colorations

Cette construction fournit un graphe ayant I comme spectre pour tout ensemble d'entiers $I \subset (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})$ avec $argmin(I) = 2$. Pour enlever la contrainte $I \subset (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})$ avec $\min(I) = 2$, il suffit de réaliser une opération de translation : à partir d'un graphe H, on obtient un graphe G correspondant à l'union de ce graphe et d'un graphe K_x complet



un graphe ayant $\{2\}$ comme b-spectre. | un graphe complet de 3 sommets | un graphe ayant $\{5\}$ comme b-spectre.

FIG. 4.5 – opération de translation

à x sommets. Tous les sommets de H seront adjacents à tous les sommets de K_x. Cette construction implique qu'il existe une b-coloration de i couleurs dans H si et seulement s'il existe une b-coloration de $i+x$ couleurs dans G. La figure 4.5 illustre cette translation.

Par contre, cette construction ne donne pas un graphe G ayant un nombre minimum de sommets ou d'arêtes ayant I comme b-spectre. Par exemple, pour le graphe dessiné dans la figure 4.3, il suffit de supprimer l'ensemble des arêtes $\{(v_0^j, v_1^i) : 2 \leq i \leq 3 \wedge 4 \leq j \leq 6\}$ pour obtenir un graphe ayant $\{2, 4, 5, 6\}$ comme spectre. Par contre, pour obtenir un graphe avec un tel spectre, notre construction doit rajouter des sommets des arêtes et des sommets. Une question naturelle se pose alors : quels sont les graphes ayant un nombre minimum de sommets ou d'arêtes pour un spectre donné ?

De plus, une question naturelle qui suit à ces précédents travaux est de comprendre la structure des graphes qui ont un intervalle comme b-spectre. Ces problèmes sont liés aux problèmes d'interpolation de [Harary et al., 1967] pour les a-colorations. Plus formellement, quel est le type de graphe dont le b-spectre est un intervalle ?

Définition 17 (Graphe b-continu) *Un graphe est* b-continu *si et seulement si son b-spectre est composé uniquement d'entiers consécutifs.*

Déterminer si G est b-continu est NP-complet [6]. Ce problème reste aussi difficile même si une b-coloration de $\chi(G)$ couleurs et une b-coloration de $b(G)$ couleurs de G sont données. De plus, ce résultat a été étendu à la classe de graphes bipartis [Faik, 2005].

Heureusement, les arbres [Irving and Manlove, 1999], comme presque tous les graphes 3-réguliers [Irving and Manlove, 1999], ainsi que les graphes plus atypiques P_4-*sparces* [Bonomo et al., 2009] sont b-continus. Mais aussi, les graphes d'intervalles et les graphes triangulés sont b-continus (voir [36], [37]). La preuve [36] se base sur la structure même de ces graphes (représentation graphique en intervalle, ou ordre d'élimination parfait). A partir d'une b-coloration c de p couleurs, une b-coloration c de $p-1$ couleurs est construite en utilisant la numérotation *reo* pour les graphes d'intervalle (ou un ordre d'élimination parfait pour les graphes triangulés) : par itération successive, l'algorithme supprime un sommet b-chromatique de plus petit indice, jusqu'à qu'une couleur ne possède plus de sommet b-chromatique.

Cette preuve est une preuve existentielle. Elle ne calcule pas des b-colorations de $\phi_b(G)$, $\phi_b(G)-1, \ldots$ couleurs puisqu'à aucun moment, on a construit une b-coloration de $\phi_b(G)$ couleurs.

Dans les graphes d'intervalles et triangulés, la complexité du problème de déterminer le nombre b-chromatique reste encore ouverte. Nous conjecturons que ces problèmes sont NP-complets.

4.4 A propos de la f-coloration

Dans cette section, nous nous intéresserons à une b-coloration particulière : la f-coloration introduit dans [Dunbar et al., 2000]. Voici la définition formelle de cette coloration :

Définition 18 (f-coloration) *Une* f-coloration *d'un graphe G est une coloration propre de sommets telle que tout sommet du graphe est b-chromatique.*

Contrairement à la coloration propre, et à la b-coloration, il existe des graphes n'admettant pas de f-coloration. Par exemple, le graphe composé d'un graphe complet de $k \geq 3$ sommets et d'un sommet étant voisin d'un seul sommet de ce graphe complet n'admet pas de f-coloration puisque le nombre chromatique de ce graphe est supérieur à 3 et que le sommet de degré 1 ne peut pas être b-chromatique.

De plus, on peut remarquer que tout graphe biparti admet une f-coloration, puisque une coloration propre de deux couleurs est une f-coloration. Cela implique, que l'algorithme polynomial reconnaissant un graphe biparti permet de déterminer un temps polynomial si un graphe admet une f-coloration de 2 couleurs. A-t-on le même résultat pour 3 couleurs ?

Ce n'est pas vrai pour 3 couleurs. Décider si un graphe admet une f-coloration avec 3 couleurs est NP-complet [Dunbar et al., 2000]. Par rapport à la b-coloration, déterminer s'il existe d'une b-coloration pour tout graphe est polynomial. En effet, il suffit de rappeler qu'une coloration d'un graphe G utilisant $\chi(G)$ couleurs est toujours une b-coloration.

Face à ce résultat, la frontière entre la tractabilité et la non-tractabilité a été étudiée. Il a été prouvé que décider si un graphe admet une f-coloration ayant 3 couleurs est NP-complet pour les graphes en général [Dunbar et al., 2000] et aussi pour les graphes bipartis [34], [Laskar and Lyle, 2009]. Ce résultat a été étendu pour des graphes de degré maximum inférieur ou égale à 3 [41].

De plus, peu de classes de graphes ont été étudiées dans ce contexte. Un exemple parmi les plus simples est l'arbre. Comme les arbres possèdent des sommets de degré 1 (les feuilles) et qu'ils sont bipartis, il est facile de déduire que les arbres possèdent une seule f-coloration de 2 couleurs. Récemment, dans [Laskar and Lyle, 2009], la préservation des f-colorations de produits cartésiens a été étudiée. Ceci a permit de déduire que les graphes hypercubes Q_n de dimension particulière $n = 2^k - 1$ possèdent des f-colorations.

A notre connaissance, pour les classes de graphes classiques (graphes d'intervalle, graphes triangulés,...), les questions suivantes sont encore ouvertes. Peut-on déterminer si le graphe possède une f-coloration en temps polynomial ? Existe-t-il un algorithme qui construit une f-coloration si le graphe en entrée en possède une ?

Malgré ces résultats négatifs, comme pour la coloration propre, les paramètres classiques étudiés pour la coloration s'adaptent pour la f-coloration. En d'autres termes, si une telle coloration existe pour un graphe G, le *nombre f-chromatique* (resp. *nombre f-achromatique*) noté (resp. $\psi_f(G)$) est le nombre de couleurs minimum (resp. maximum) pour lequel G admet une f-coloration.

Dans [34], il a été prouvé que même pour des graphes ayant une f-coloration, le problème de calculer le paramètre $\psi_f(G)$ ne peut pas s'approximer à un facteur multiplicatif $n^{1-\epsilon}$ pour n'importe $\epsilon > 0$ avec n correspondant au nombre de sommets de G, si $P \neq NP$. Contrairement à la coloration propre (voir résultat [Blum, 1994]), connaître l'existence d'une f-coloration ne simplifie pas le problème.

Par contre, à ma connaissance, aucun travail ne s'est penché sur les paramètres $\psi_f(G)$ et $\chi_f(G)$ dans les graphes classiques (d'intervalles, triangulés, co-graphes,...). Il serait intéressant de résoudre les questions suivantes pour ces types de graphes. Peut-on calculer en temps polynomial les paramètres $\psi_f(G)$ et $\chi_f(G)$ dans de tels types de graphes si le graphe possède une f-coloration ? Peut-on construire polynomialement une f-coloration ayant $\psi_f(G)$ (resp. $\chi_f(G)$) couleurs ?

De la même façon que pour la b-coloration, les notions de *f-spectre* et de *graphes f-continus* ont été introduites. Il a été prouvé dans [34] que décider si un graphe est f-continu est NP-complet. De plus si $P = NP$, le problème de calculer le paramètre $\psi_f(G)$ pour un graphe f-continu n'appartient pas à la classe APX même si la propriété de f-continuité est connue.

Malgré tous les résultats négatifs, il a été prouvé dans [34] que pour tout ensemble fini et non vide $I \subset \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, il existe un graphe G dont le f-spectre est l'ensemble I. Cette construction s'inspire de celle sur les b-colorations mais est plus complexe. En effet, l'opérateur de translation existe toujours et le graphe se construit pas à pas. A chaque étape, le graphe construit s'enrichit d'une f-coloration supplémentaire tout en conservant ses précédentes f-colorations par l'intermédiaire de produits cartésiens de graphes complets. Cette succession d'opérations provoque le fait que le nombre de sommets du graphe ainsi construit est exponentiel par rapport à la cardinalité de I et à son maximum.

Suite à cette remarque, une question naturelle se pose : pour un ensemble d'entiers I, existe-t-il un graphe G ayant I comme f-spectre et ayant un nombre polynomial de sommets par rapport à I ?