La NP-complétude

Johanne Cohen

PRISM/CNRS, Versailles, France.

Références

1. *Algorithm Design*, Jon Kleinberg, Eva Tardos, Addison-Wesley, 2006.

2. *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*, M. R. Garey, D. S. Johnson, 1976.

3. Transparents inspirés du cours *"Fondements de l'informatique : Logique, Modèles, Calculs"* d'Olivier Bournez.

Plan

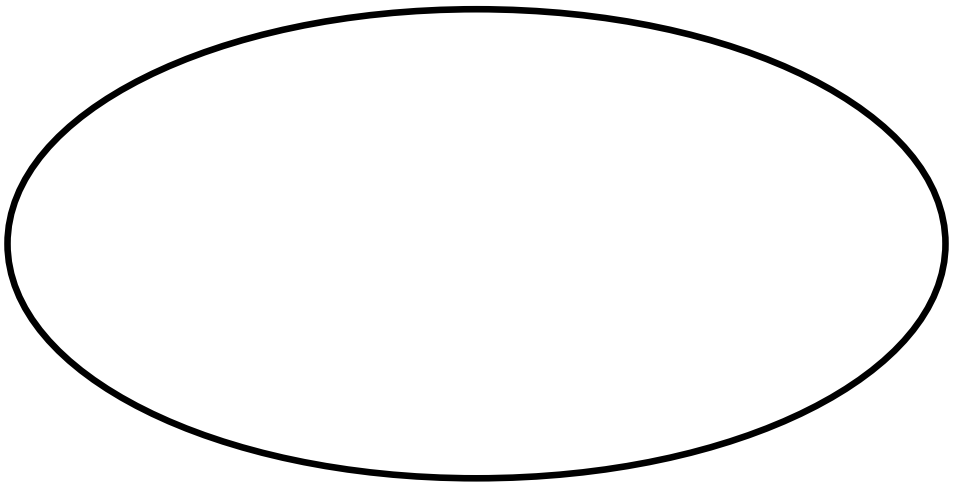
Objectif de ce cours

Distinguer ce qui est raisonnable de ce qui n'est pas raisonnable en terme de temps de calcul.

Objectif de ce cours

Distinguer ce qui est raisonnable de ce qui n'est pas raisonnable en terme de temps de calcul.

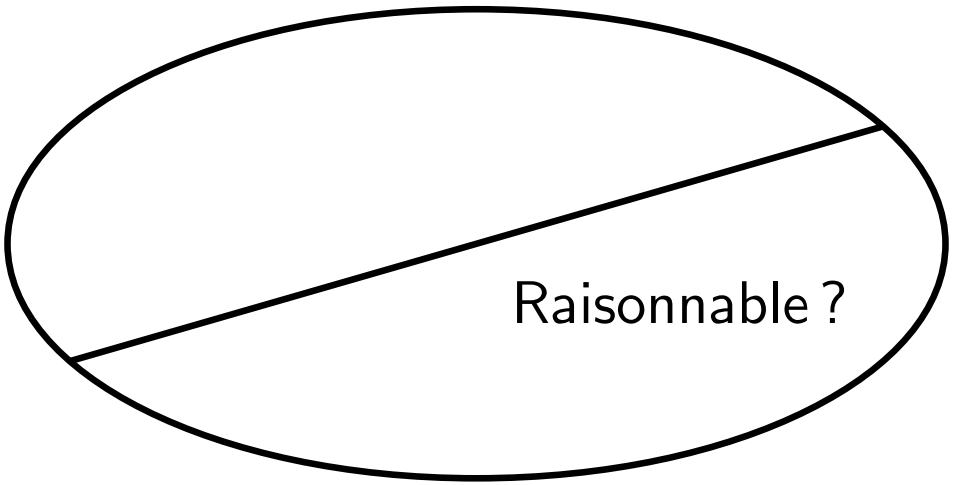
Problèmes décidables.



Objectif de ce cours

Distinguer ce qui est raisonnable de ce qui n'est pas raisonnable en terme de temps de calcul.

Problèmes décidables.



Complexité d'un algorithme, d'un problème

- $Complexite(\mathcal{A}, d)$ est le nombre d'opérations effectuées par algorithme $\mathcal{A}$ ayant d comme une entrée.

  On cherche souvent à évaluer cette complexité en fonction de la taille des entrées $taille(d)$.

- On peut alors parler de la complexité (au pire cas)
  - d'un algorithme (on fait varier seulement les entrées)

$$Complexite_{\mathcal{A}}(n) = \max_{d\,/\,taille(d)=n} Complexite(\mathcal{A}, d).$$

  - d'un problème (on fait varier l'algorithme, et les entrées)

$$\inf_{\mathcal{A} \text{ correct}} Complexite_{\mathcal{A}}(n).$$

Plus précisément

Retour sur l'épisode précédent

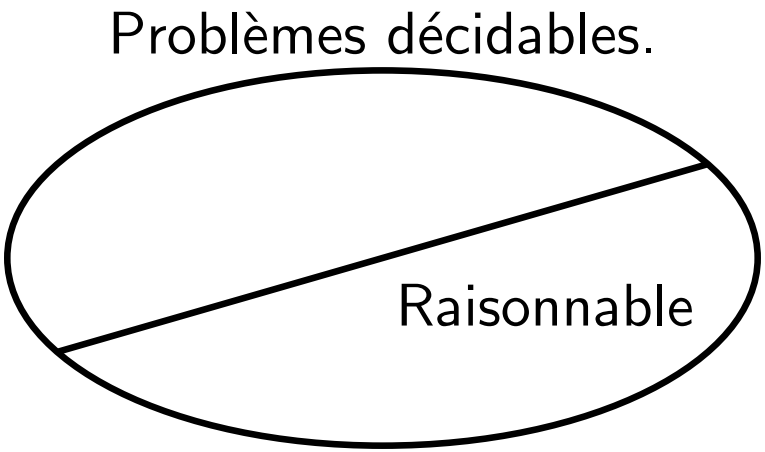
- Une convention
- Pourquoi cette convention ?

Une convention

- La convention suivante s'est imposée en informatique :
  - **CONVENTION :** Temps raisonnable $=$ temps polynomial,
    - c'est-à-dire en $\mathcal{O}(n^k)$ pour un entier k.

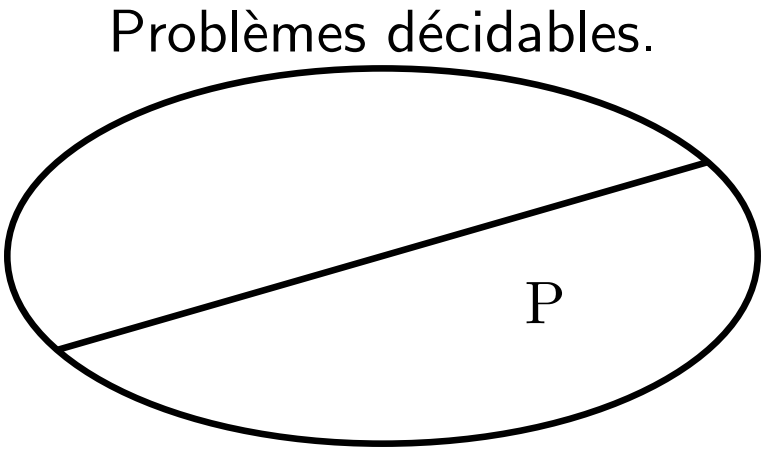
Une convention

- La convention suivante s'est imposée en informatique :
  - **CONVENTION :** Temps raisonnable = temps polynomial,
    - c'est-à-dire en $\mathcal{O}(n^k)$ pour un entier k.
- Graphiquement :



Une convention

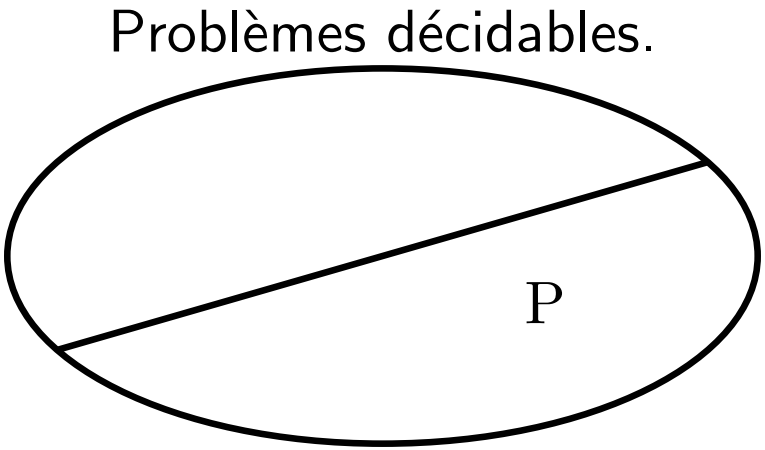
- La convention suivante s'est imposée en informatique :
  - **CONVENTION :** Temps raisonnable $=$ temps polynomial,
    - c'est-à-dire en $\mathcal{O}(n^k)$ pour un entier k.
- Graphiquement :



- Exemples :

Une convention

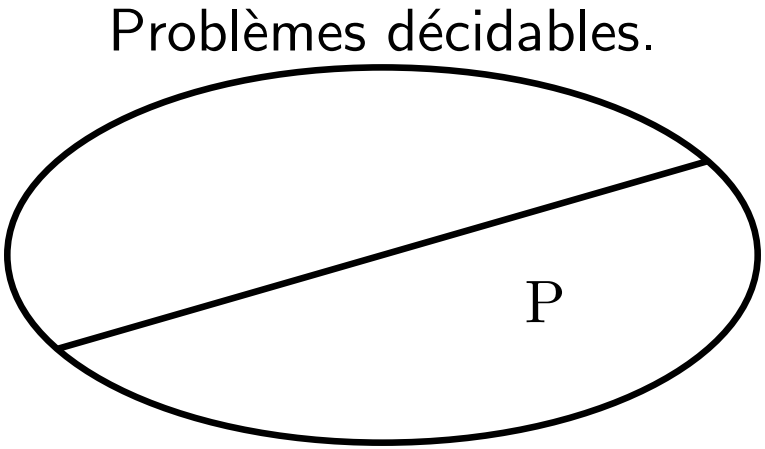
- La convention suivante s'est imposée en informatique :
  - **CONVENTION :** Temps raisonnable $=$ temps polynomial,
    - c'est-à-dire en $\mathcal{O}(n^k)$ pour un entier k.
- Graphiquement :



- Exemples :
  - Décider si un graphe est eulerien est dans P.

Une convention

- La convention suivante s'est imposée en informatique :
  - **CONVENTION :** Temps raisonnable $=$ temps polynomial,
    - c'est-à-dire en $\mathcal{O}(n^k)$ pour un entier k.
- Graphiquement :



- Exemples :
  - Décider si un graphe est eulerien est dans P.
  - On ne sait pas si le problème du cycle hamiltonien est dans P.

Plus précisément

Retour sur l'épisode précédent

- Une convention
- Pourquoi cette convention ?

Raison 1 : s'affranchir du modèle de calcul

- Thèse de Church :
  - Les modèles suivants se simulent deux à deux :
    - Les machines de Turing à un ruban.
    - Les machines de Turing à deux rubans.
    - Les machines à $k \geq 2$ piles
    - Les machines RAM
    - Les programmes JAVA, C, CAML, ...

Raison 1 : s'affranchir du modèle de calcul

- Thèse de Church :
  - Les modèles suivants se simulent deux à deux :
    - Les machines de Turing à un ruban.
    - Les machines de Turing à deux rubans.
    - Les machines à $k \geq 2$ piles
    - Les machines RAM
    - Les programmes JAVA, C, CAML, ...
  - de telle sorte que : t instructions de l'un sont simulées par un nombre d'instructions polynomial en t par l'autre.

Raison 1 : s'affranchir du modèle de calcul

Nombre d'instructions : T

Raison 1 : s'affranchir du modèle de calcul

Nombre d'instructions : T^k

Raison 1 : s'affranchir du modèle de calcul

Nombre d'instructions : $(T^k)^{k'} = T^{kk'}$

Raison 1 : s'affranchir du modèle de calcul

Nombre d'instructions : $(T^{kk'})^{k''} = T^{kk'k''}$

Raison 1 : s'affranchir du modèle de calcul

Nombre d'instructions : $(T^{kk'})^{k''} = T^{kk'k''}$

- On peut donc parler d'algorithme **efficace** sans avoir à préciser dans quel langage / avec quel modèle l'algorithme est implémenté.

Raison 1 : s'affranchir du modèle de calcul

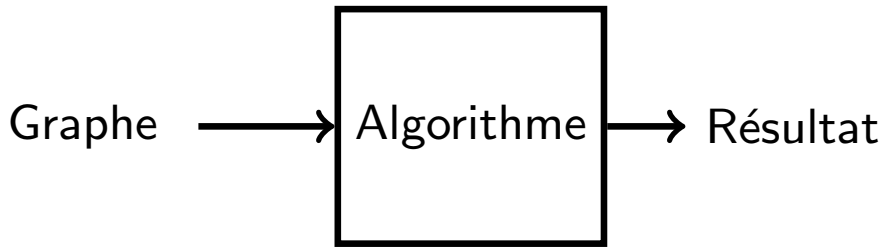
Nombre d'instructions : $(T^{kk'})^{k''} = T^{kk'k''}$

- On peut donc parler d'algorithme **efficace** sans avoir à préciser dans quel langage / avec quel modèle l'algorithme est implémenté.

- Le temps correspond au nombre d'instructions dans chacun de ces modèles.

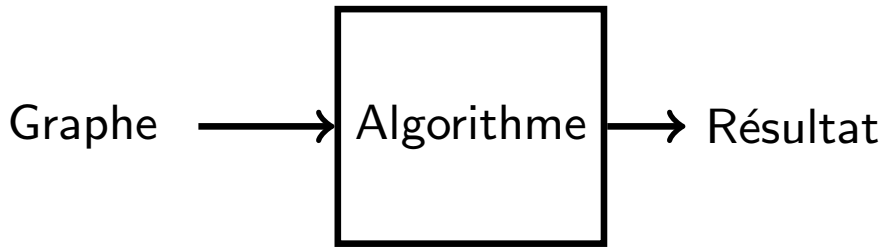
(à la composition par un polynôme près)

Raison 2 : s'affranchir de problèmes du codage



Temps : $T(taille(Graphe))$

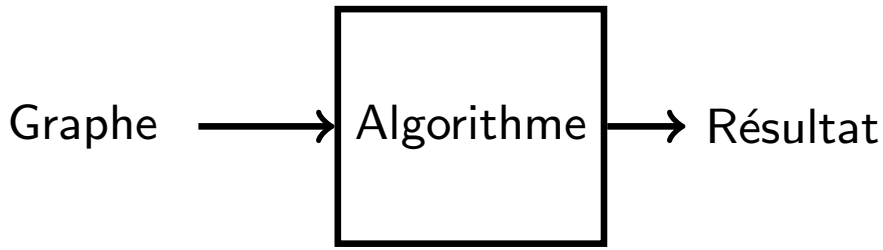
Raison 2 : s'affranchir de problèmes du codage



Temps : $T(taille(Graphe))$

- La plupart des objets informatiques usuels peuvent se représenter de différentes façons . . .

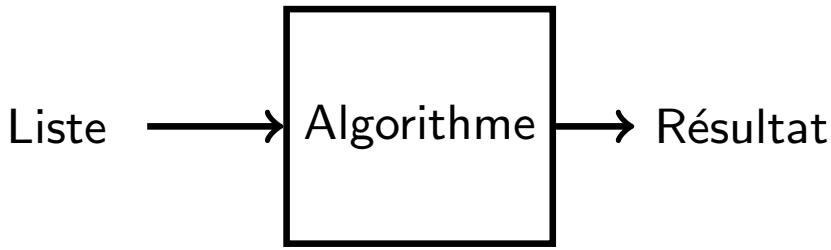
Raison 2 : s'affranchir de problèmes du codage



Temps : $T(taille(Graphe))$

- La plupart des objets informatiques usuels peuvent se représenter de différentes façons . . .
  - Exemple : un graphe peut se représenter
    - par une **matrice d'adjacence.**
    - par une **liste d'adjacence.**

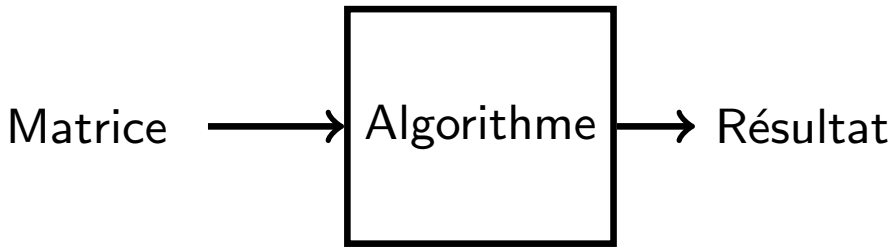
Raison 2 : s'affranchir de problèmes du codage



Temps : $T(taille(Liste))$

- La plupart des objets informatiques usuels peuvent se représenter de différentes façons . . .
  - Exemple : un graphe peut se représenter
    - par une **matrice d'adjacence.**
    - par une **liste d'adjacence.**

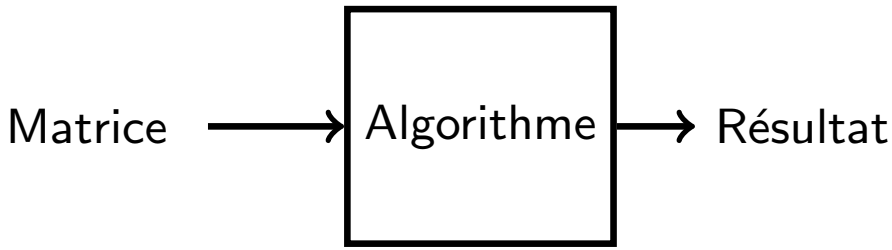
Raison 2 : s'affranchir de problèmes du codage



Temps : $T(taille(Matrice))$

- La plupart des objets informatiques usuels peuvent se représenter de différentes façons . . .
  - Exemple : un graphe peut se représenter
    - par une **matrice d'adjacence.**
    - par une **liste d'adjacence.**

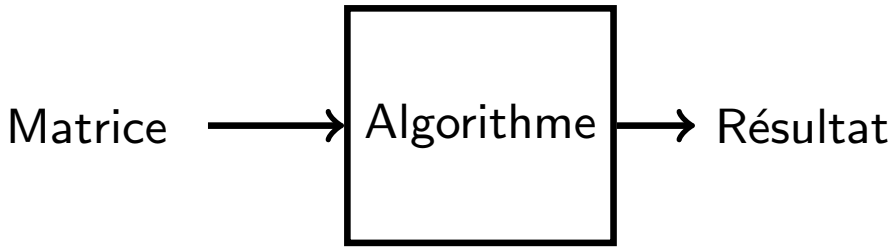
Raison 2 : s'affranchir de problèmes du codage



Temps : $T(taille(Matrice))$

- La plupart des objets informatiques usuels peuvent se représenter de différentes façons . . .
  - Exemple : un graphe peut se représenter
    - par une **matrice d'adjacence.**
    - par une **liste d'adjacence.**
- . . .mais passer d'une façon de les représenter à l'autre est possible en un temps qui reste polynomial en la taille du codage.

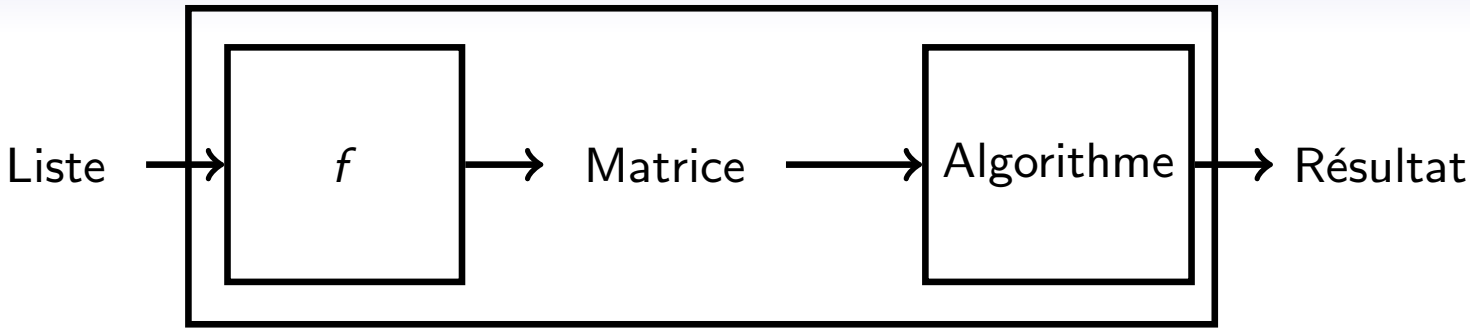
Raison 2 : s'affranchir de problèmes du codage



Temps : $T(taille(Matrice))$

- La plupart des objets informatiques usuels peuvent se représenter de différentes façons . . .
  - Exemple : un graphe peut se représenter
    - par une **matrice d'adjacence.**
    - par une **liste d'adjacence.**
- . . .mais passer d'une façon de les représenter à l'autre est possible en un temps qui reste polynomial en la taille du codage.
  - Exemple : on peut transformer une liste d'adjacence en une matrice d'adjacence en temps polynomial (et réciproquement).

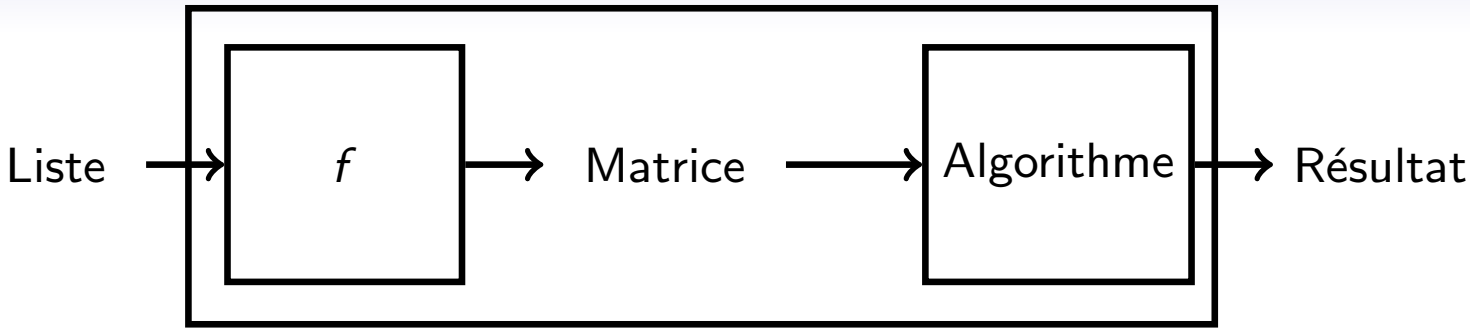
Raison 2 : s'affranchir de problèmes du codage



Temps : $T(taille(Liste)) = T_f(taille(Liste)) + T(taille(Matrice))$

- La plupart des objets informatiques usuels peuvent se représenter de différentes façons . . .
  - Exemple : un graphe peut se représenter
    - par une **matrice d'adjacence.**
    - par une **liste d'adjacence.**
- . . .mais passer d'une façon de les représenter à l'autre est possible en un temps qui reste polynomial en la taille du codage.
  - Exemple : on peut transformer une liste d'adjacence en une matrice d'adjacence en temps polynomial (et réciproquement).

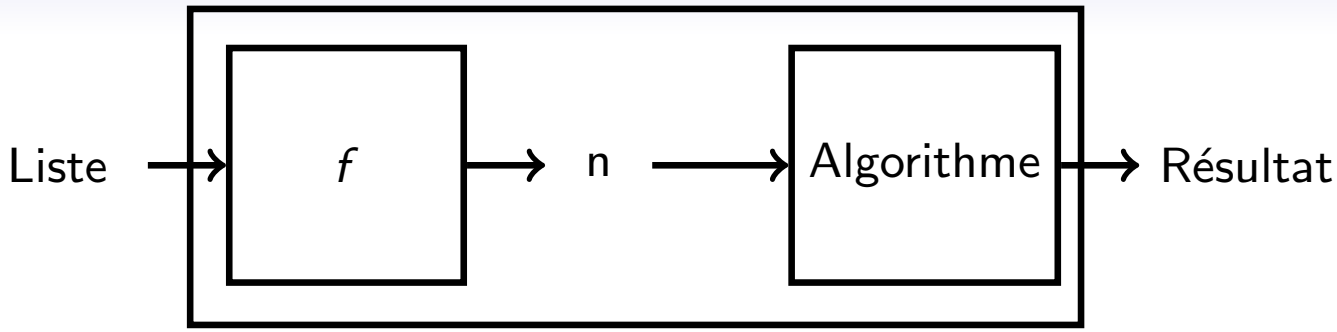
Raison 2 : s'affranchir de problèmes du codage



Temps : $T(taille(Liste)) = T_f(taille(Liste)) + T(taille(Matrice))$

- La plupart des objets informatiques usuels peuvent se représenter de différentes façons . . .
  - Exemple : un graphe peut se représenter
    - par une **matrice d'adjacence.**
    - par une **liste d'adjacence.**
- . . .mais passer d'une façon de les représenter à l'autre est possible en un temps qui reste polynomial en la taille du codage.
  - Exemple : on peut transformer une liste d'adjacence en une matrice d'adjacence en temps polynomial (et réciproquement).

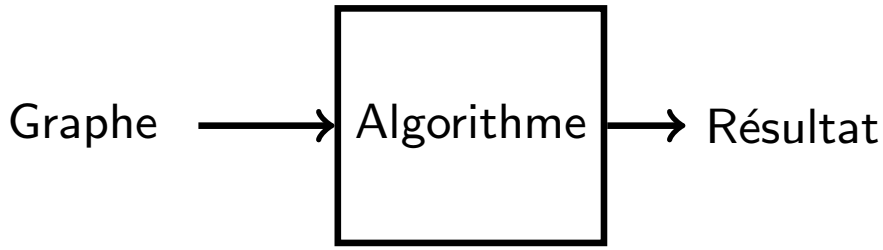
Raison 2 : s'affranchir de problèmes du codage



Temps : $T(taille(Liste)) = T(n^k)$

- La plupart des objets informatiques usuels peuvent se représenter de différentes façons . . .
  - Exemple : un graphe peut se représenter
    - par une **matrice d'adjacence.**
    - par une **liste d'adjacence.**
- . . .mais passer d'une façon de les représenter à l'autre est possible en un temps qui reste polynomial en la taille du codage.
  - Exemple : on peut transformer une liste d'adjacence en une matrice d'adjacence en temps polynomial (et réciproquement).

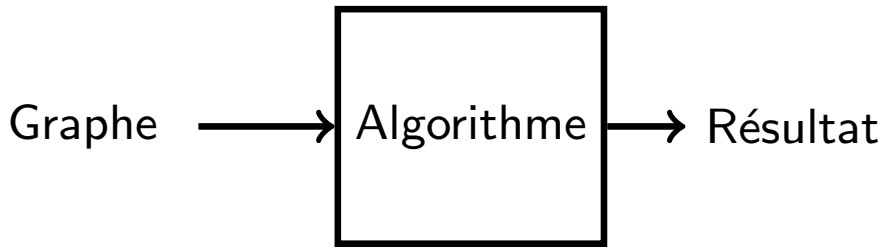
Raison 2 : s'affranchir de problèmes du codage



Temps : Polynomial/Non polynomial

- La plupart des objets informatiques usuels peuvent se représenter de différentes façons . . .
  - Exemple : un graphe peut se représenter
    - par une **matrice d'adjacence.**
    - par une **liste d'adjacence.**
- . . .mais passer d'une façon de les représenter à l'autre est possible en un temps qui reste polynomial en la taille du codage.
  - Exemple : on peut transformer une liste d'adjacence en une matrice d'adjacence en temps polynomial (et réciproquement).
- On peut donc parler d'algorithme **raisonnable** sur ces objets sans avoir à rentrer dans les détails du codage ces objets.

Raison 2 : s'affranchir de problèmes du codage



Temps : Polynomial/Non polynomial

- On peut donc parler d'algorithme **raisonnable** sur ces objets sans avoir à rentrer dans les détails du codage ces objets.

Plan

La classe P

Rappel : Un problème de décision Π est un ensemble d'instances I_Π et un sous-ensemble $Oui(\Pi)$ d'instances positives.

Exemple : Graphe eulerien
Données : un graphe non-orienté $G = (V, E)$.
Question : G a-il un cycle eulerien ?

Définition

La classe P est la classe des problèmes de décision qui admettent un algorithme de complexité polynomale.

La classe NP

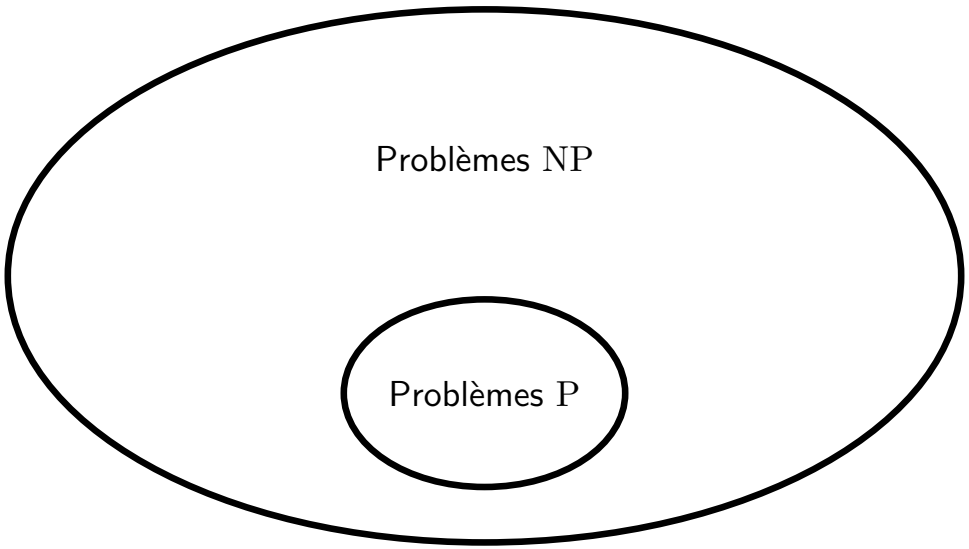
Définition

La classe NP est formée des problèmes de décision Π qui possèdent un vérificateur polynomial.
Un vérificateur V est un algorithme qui prend une information en plus (certificat) pour vérifier qu'une instance est positive.

Exemple 1 : Graphe Hamiltonien
Données : un graphe non-orienté $G = (V, E)$.
Question : G a-il un cycle hamiltonien ?

- Le certificat correspond à une suite S de sommets
- V vérifie que S est un cycle et qu'il transverse chaque sommet une unique fois.
- V fonctionne bien en temps polynomial.

Comparaison entre les deux classes P et NP.



Par définition $\mathrm{P} \subset \mathrm{NP}$.

Plus précisément

Les classes P et NP

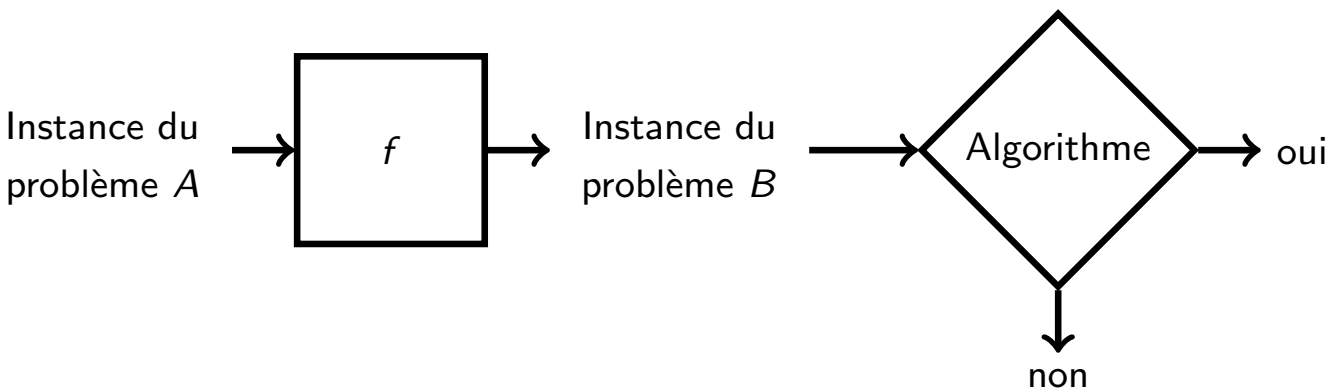
La notion de réduction

Comment comparer les problèmes

- Soient A et B deux problèmes de décision.
  Une **réduction de A vers B** est une fonction $f : I_A \to I_B$ calculable **en temps polynomial** telle que

$$w \in Oui(A) \text{ ssi } f(w) \in Oui(B).$$

- On note $A \leq B$ lorsque A se réduit à B.

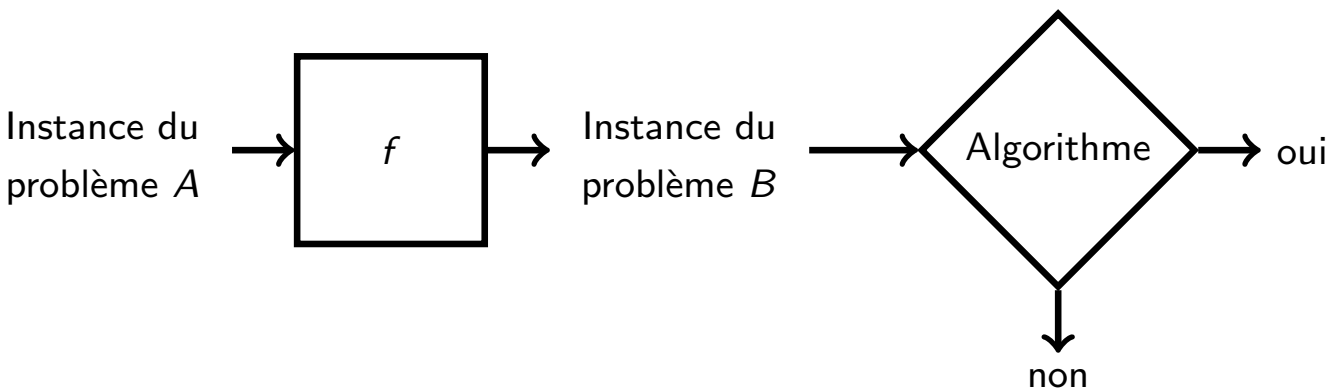


Comment comparer les problèmes

- Soient A et B deux problèmes de décision.
  Une **réduction de A vers B** est une fonction $f : I_A \to I_B$ calculable **en temps polynomial** telle que

$$w \in Oui(A) \text{ ssi } f(w) \in Oui(B).$$

- On note $A \leq B$ lorsque A se réduit à B.
  - intuitivement : $A \leq B$ signifie que A est plus facile que B.



Principales propriétés

Théorème

$\leq$ est un préordre ($=$ est reflexive, transitive) :

1. $L \leq L$;
2. $L_1 \leq L_2$, $L_2 \leq L_3$ impliquent $L_1 \leq L_3$.

Preuve:

- Intuitivement : un problème est aussi facile (et difficile) que lui-même

  il suffit de considérer la fonction identité pour f

- Intuitivement : la relation "être plus facile que" est transitive.

$L_1 \leq L_2$ via la réduction f

$\Longrightarrow x \in OUI(I_{L_1})$ ssi $g(f(x)) \in OUI(I_{L_2})$.

$L_2 \leq L_3$ via la réduction g

La composée de deux fonctions calculable **en temps polynomial** est calculable. □

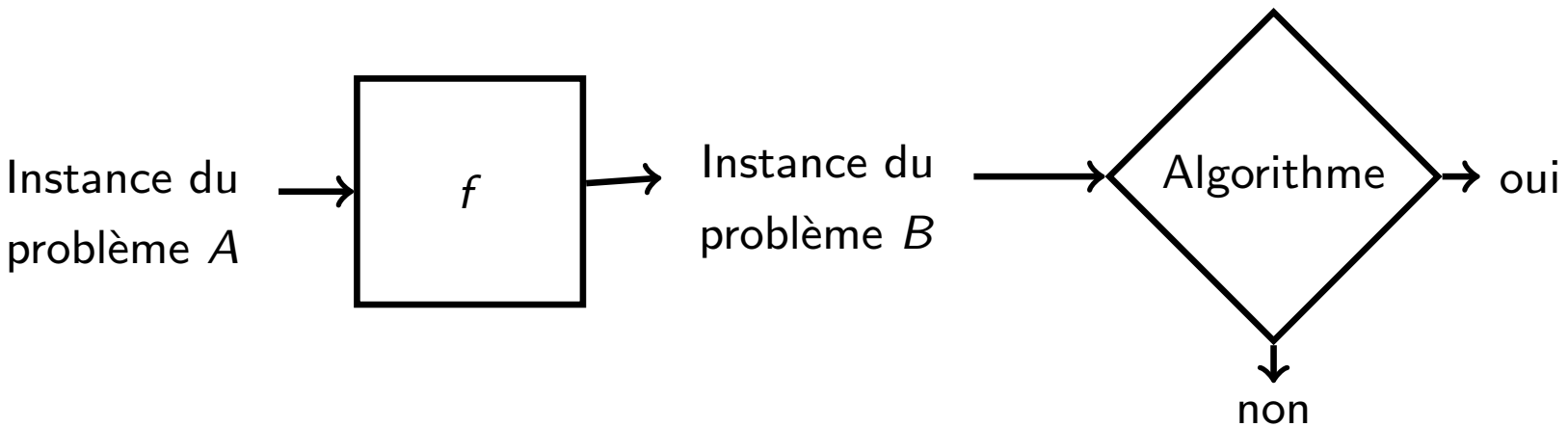
Théorèmes

Théorème

Si $A \leq B$, et si A est dans P, alors B est dans P.

Théorème

Si $A \leq B$, et si A n'est pas dans P, alors B n'est pas dans P.



Plan

Motivation

- On souhaite comprendre quels sont les problèmes les plus difficiles dans NP.

Motivation

- On souhaite comprendre quels sont les problèmes les plus difficiles dans NP.
- Un problème A est dit NP-difficile si tout autre problème B de NP est tel que $B \leq A$.
  - Intuitivement : il est plus difficile que tous les problèmes dans la classe.

Motivation

- On souhaite comprendre quels sont les problèmes les plus difficiles dans NP.
- Un problème A est dit NP-difficile si tout autre problème B de NP est tel que $B \leq A$.
  - Intuitivement : il est plus difficile que tous les problèmes dans la classe.
- Un problème A est dit NP-complet si en plus on a $A \in \mathrm{NP}$.
  - Autrement dit : A est NP-complet signifie que A est un élément maximum dans NP pour $\leq$.

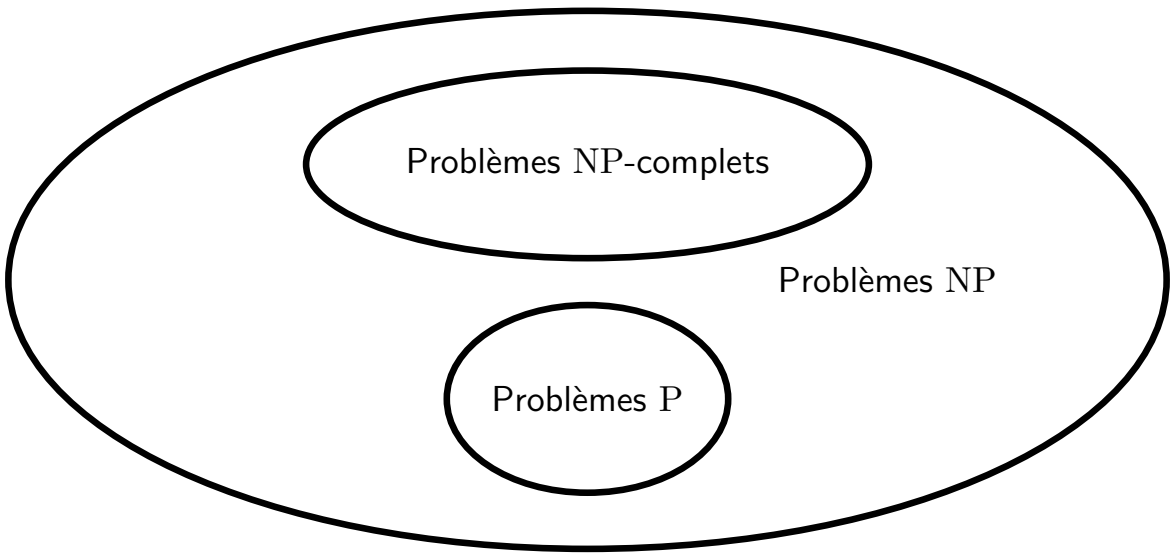
Plus précisément

- NP-complétude
  - Théorème de Cook-Levin
  - Comment pour prouver la NP-complétude

Théorème de Cook-Levin

Théorème Cook-Levin

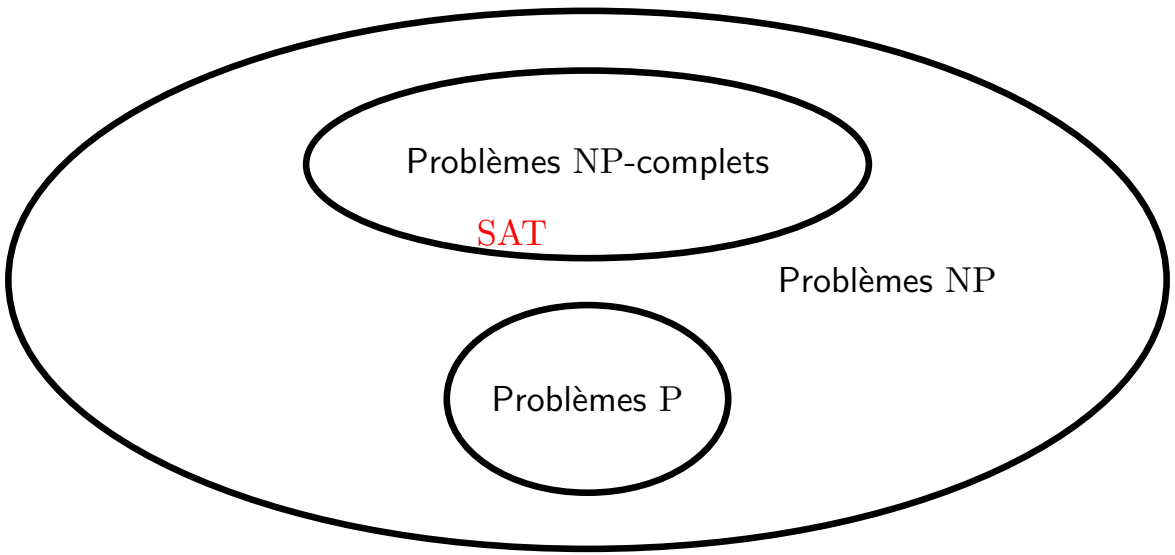
Le problème SAT est NP-complet.



Théorème de Cook-Levin

Théorème Cook-Levin

Le problème SAT est NP-complet.



Conséquense

Corollaire

$\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ si et seulement si $\mathrm{SAT} \in \mathrm{P}$.

Preuve:

□

Conséquense

Corollaire

$\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ si et seulement si $\mathrm{SAT} \in \mathrm{P}$.

Preuve:

- Si $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, alors puisque SAT est dans NP,

$\mathrm{SAT} \in \mathrm{P}$.

□

Conséquense

Corollaire

$\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ si et seulement si $\mathrm{SAT} \in \mathrm{P}$.

Preuve:

- Si $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, alors puisque SAT est dans NP,

  $\mathrm{SAT} \in \mathrm{P}$.

- Réciproquement, si $\mathrm{SAT} \in \mathrm{P}$,
  - Puisque SAT est complet,

    pour tout problème $B \in \mathrm{NP}$, $B \leq \mathrm{SAT}$
  - Donc $B \in \mathrm{P}$

□

Conséquense

Corollaire

$$\mathrm{P} = \mathrm{NP} \text{ si et seulement si } \mathrm{SAT} \in \mathrm{P}.$$

Preuve:

- Si $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$, alors puisque SAT est dans NP,

  $\mathrm{SAT} \in \mathrm{P}$.

- Réciproquement, si $\mathrm{SAT} \in \mathrm{P}$,
  - Puisque SAT est complet,

    pour tout problème $B \in \mathrm{NP}$, $B \leq \mathrm{SAT}$
  - Donc $B \in \mathrm{P}$

□

Remarque: généralisation à n'importe problème NP-complet

- Soit A un problème NP-complet.

  $$\mathrm{P} = \mathrm{NP} \text{ si et seulement si } A \in \mathrm{P}.$$

- D'où l'intérêt de produire de nombreux problèmes NP-complets

A quoi sert de prouver la NP-complétude d'un problème ?

- Arriver à prouver que $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$...

A quoi sert de prouver la NP-complétude d'un problème ?

- Arriver à prouver que $\mathrm{P} = \mathrm{NP}\ldots$
  - Si un problème A et un problème B sont NP-complets, alors $A \leq B$ et $B \leq A$:

    Tous les problèmes NP-complets sont donc de même difficulté.

A quoi sert de prouver la NP-complétude d'un problème ?

- Arriver à prouver que $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$...
  - Si un problème A et un problème B sont NP-complets, alors $A \leq B$ et $B \leq A$:

    Tous les problèmes NP-complets sont donc de même difficulté.

- Surtout :
  - Supposons que l'on n'arrive pas à trouver un algorithme polynomial pour un problème.

    Prouver sa NP-complétude permet de se convaincre que cela n'est pas possible, sauf si $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.

Plus précisément

- NP-complétude
  - Théorème de Cook-Levin
  - Comment pour prouver la NP-complétude

Stratégie pour prouver la NP-complétude

Pour prouver la NP-complétude d'un problème A, il suffit :

1. de prouver qu'il admet un vérificateur polynomial ;
2. de prouver que $B \leq A$ pour un problème B NP-complet

Pourquoi ?

Stratégie pour prouver la NP-complétude

Pour prouver la NP-complétude d'un problème A, il suffit :

1. de prouver qu'il admet un vérificateur polynomial ;
2. de prouver que $B \leq A$ pour un problème B NP-complet

Pourquoi ?

- le point 1. permet de garantir que $A \in \mathrm{NP}$,

Stratégie pour prouver la NP-complétude

Pour prouver la NP-complétude d'un problème A, il suffit :

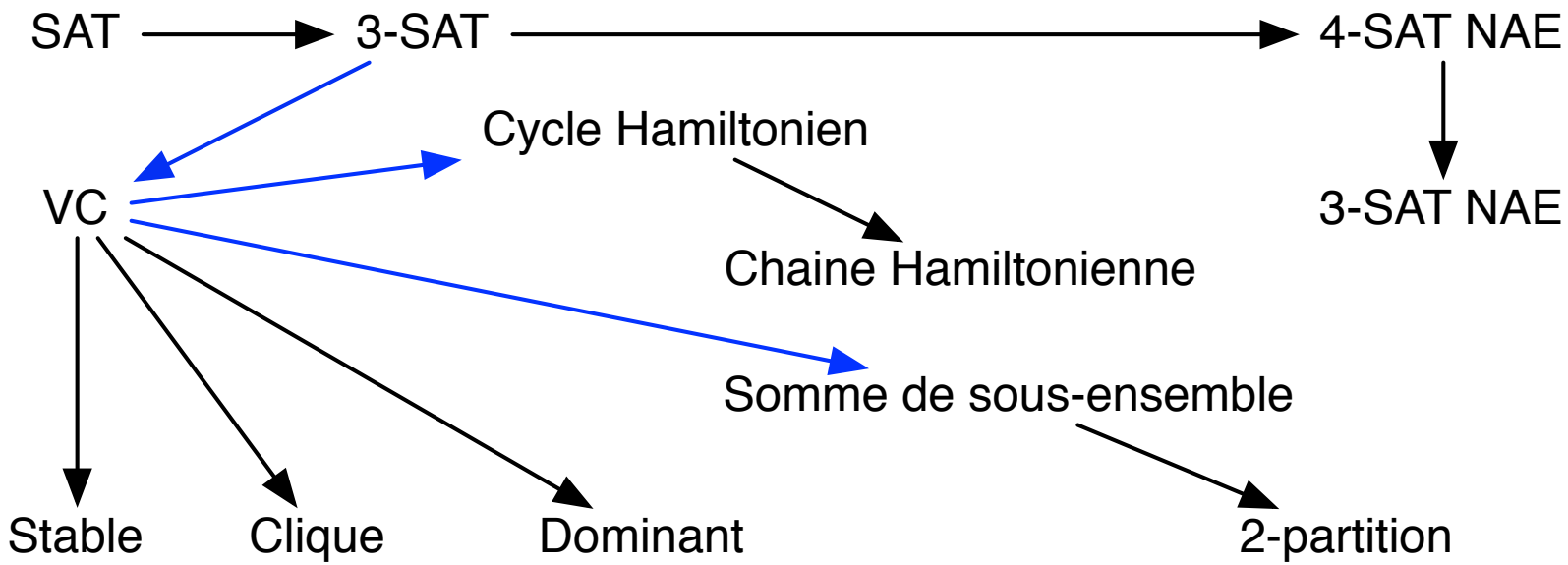
1. de prouver qu'il admet un vérificateur polynomial ;
2. de prouver que $B \leq A$ pour un problème B NP-complet

Pourquoi ?

- le point 1. permet de garantir que $A \in \mathrm{NP}$,
- le point 2. permet que on a $C \leq A$ pour tout problème $C \in \mathrm{NP}$
  - on a $C \leq B$ comme B est NP-complet,
  - et $C \leq A$ puisque $B \leq A$.

Plan

Ce qu'on va prouver dans la suite



Le symbole $\longrightarrow$ désigne le relation "est plus facile que"

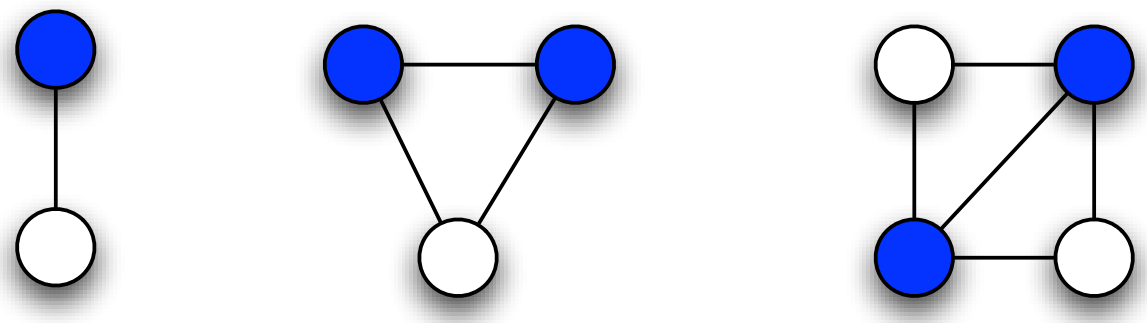
Plus précisément

Exemple de réduction

- Problème de la couverture de sommet
- Problème du cycle hamiltonien
- Problème de la somme de sous-ensembles

Couverture sommet

Couverture de sommets (VC)
Données : un graphe non-orienté $G = (V, E)$ et un entier k.
Question : G contient-il une *couverture de sommets* $\mathcal{S}$ de cardinalité au plus k ?



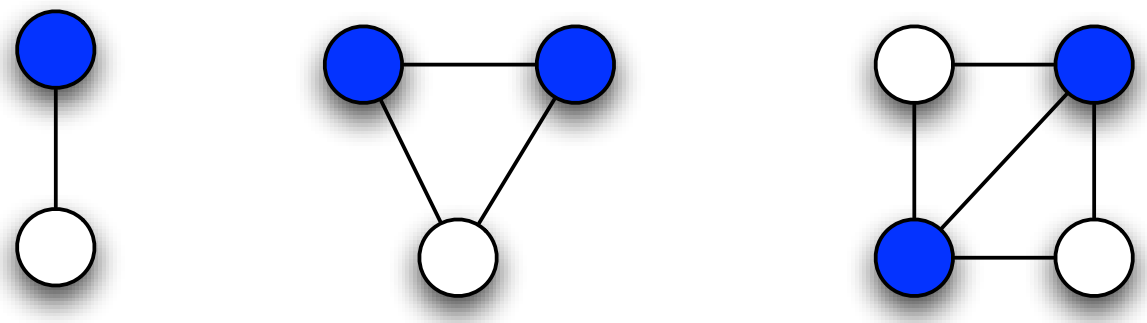
Les sommets en bleu font partie de la couverture sommet

Couverture sommet

Couverture de sommets (VC)
Données : un graphe non-orienté $G = (V, E)$ et un entier k.
Question : G contient-il une *couverture de sommets* $\mathcal{S}$ de cardinalité au plus k ?

Théorème

Le problème Couverture de sommets est NP-complet.



Les sommets en bleu font partie de la couverture sommet

VC est dans NP

- Certificat : liste $\mathcal{S}$ de sommets.
- On peut vérifier en temps polynomial que
  1. la cardinalité de $\mathcal{S}$ est inférieure ou égale à k ;
  2. pour chaque arête $(u, v) \in E$, u ou v est dans $\mathcal{S}$

3-SAT $\leq$ VC

3-SAT
Données : un ensemble U de variables $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ et une formule logique $L = C_1 \wedge \cdots \wedge C_\ell$ ayant des clauses de 3 littéraux
Question : Existe-t-il une fonction $t : U \to \{0, 1\}$ telle que t satisfait L ?

Nous allons transformer une instance (U, L) de 3-SAT en une instance (G, k) de *VC* en un temps polynomial.

3-SAT $\leq$ VC

3-SAT
Données : un ensemble U de variables $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ et une formule logique $L = C_1 \wedge \cdots \wedge C_\ell$ ayant des clauses de 3 littéraux
Question : Existe-t-il une fonction $t : U \to \{0, 1\}$ telle que t satisfait L ?

Nous allons transformer une instance (U, L) de 3-SAT en une instance (G, k) de *VC* en un temps polynomial.

- Pour chaque variable u de U, on associe deux sommets u et $\overline{u}$, et une arête $(u, \overline{u})$ dans G

3-SAT $\leq$ VC

3-SAT
Données : un ensemble U de variables $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ et une formule logique $L = C_1 \wedge \cdots \wedge C_\ell$ ayant des clauses de 3 littéraux
Question : Existe-t-il une fonction $t : U \to \{0, 1\}$ telle que t satisfait L ?

Nous allons transformer une instance (U, L) de 3-SAT en une instance (G, k) de *VC* en un temps polynomial.

- Pour chaque variable u de U, on associe deux sommets u et $\overline{u}$, et une arête $(u, \overline{u})$ dans G
- Pour chaque clause $C_i = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$,

3-SAT $\leq$ VC

3-SAT
Données : un ensemble U de variables $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ et une formule logique $L = C_1 \wedge \cdots \wedge C_\ell$ ayant des clauses de 3 littéraux
Question : Existe-t-il une fonction $t : U \to \{0, 1\}$ telle que t satisfait L ?

Nous allons transformer une instance (U, L) de 3-SAT en une instance (G, k) de *VC* en un temps polynomial.

- Pour chaque variable u de U, on associe deux sommets u et $\overline{u}$, et une arête $(u, \overline{u})$ dans G
- Pour chaque clause $C_i = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$,
  - on associe un triangle dans G composé des sommets $c_{1,i}$, $c_{2,i}$, $c_{3,i}$,

3-SAT $\leq$ VC

3-SAT
Données : un ensemble U de variables $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ et une formule logique $L = C_1 \wedge \cdots \wedge C_\ell$ ayant des clauses de 3 littéraux
Question : Existe-t-il une fonction $t : U \to \{0, 1\}$ telle que t satisfait L ?

Nous allons transformer une instance (U, L) de 3-SAT en une instance (G, k) de *VC* en un temps polynomial.

- Pour chaque variable u de U, on associe deux sommets u et $\overline{u}$, et une arête $(u, \overline{u})$ dans G
- Pour chaque clause $C_i = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$,
  - on associe un triangle dans G composé des sommets $c_{1,i}$, $c_{2,i}$, $c_{3,i}$,
  - on relie le sommet $c_{1,i}$ à ℓ_1 par une arête

3-SAT $\leq$ VC

3-SAT
Données : un ensemble U de variables $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ et une formule logique $L = C_1 \wedge \cdots \wedge C_\ell$ ayant des clauses de 3 littéraux
Question : Existe-t-il une fonction $t : U \to \{0, 1\}$ telle que t satisfait L ?

Nous allons transformer une instance (U, L) de 3-SAT en une instance (G, k) de *VC* en un temps polynomial.

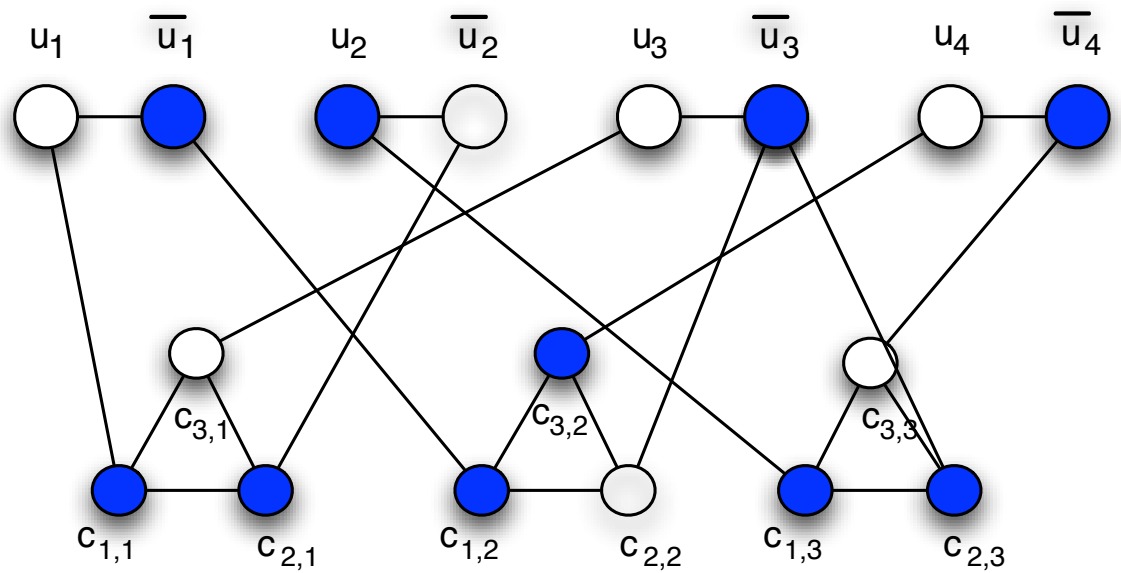
- Pour chaque variable u de U, on associe deux sommets u et $\overline{u}$, et une arête $(u, \overline{u})$ dans G
- Pour chaque clause $C_i = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$,
  - on associe un triangle dans G composé des sommets $c_{1,i}$, $c_{2,i}$, $c_{3,i}$,
  - on relie le sommet $c_{1,i}$ à ℓ_1 par une arête
- $k = |U| + 2\ell$

Exemple

Instance de 3-SAT :

- $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ de variables
- $C_1 = (u_1 \vee \overline{u_2} \vee u_3)$, $C_2 = (\overline{u_1} \vee \overline{u_3} \vee u_4)$, $C_3 = (u_2 \vee \overline{u_3} \vee \overline{u_4})$,

Instance de Couverture sommet construite à partir de l'instance précédente :



Les sommets en bleu font partie de la couverture de sommets

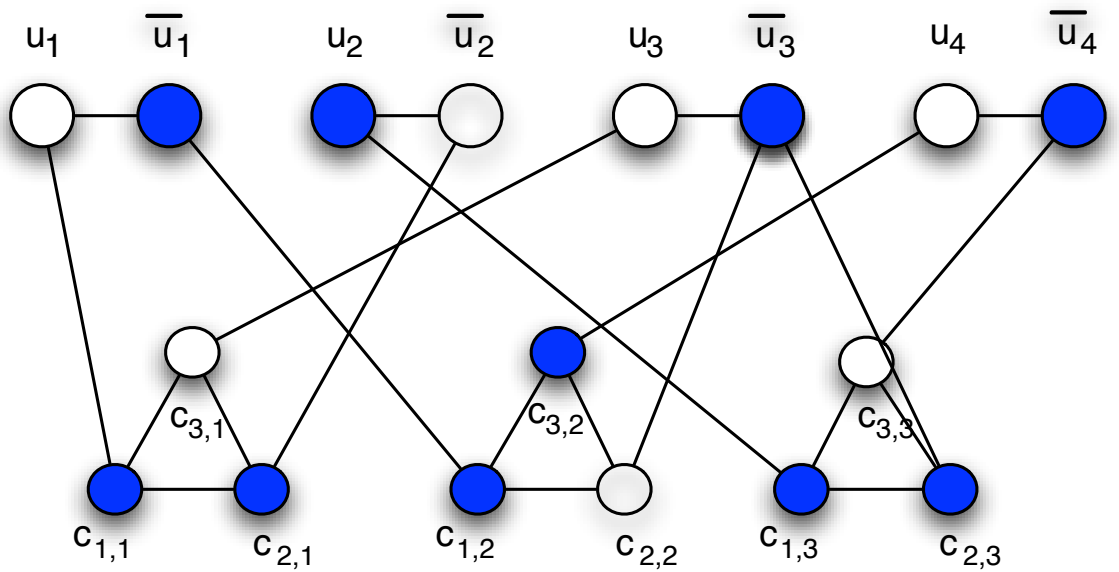
Exemple

On peut prouver :

Il existe une couverture de sommets du graphe G
d'au plus k sommets

$\Longleftrightarrow$

il existe une fonction $t : U \to \{0, 1\}$
qui satisfait toutes les clauses $C_1, \ldots, C_\ell$.



Les sommets en bleu font partie de la couverture de sommets

Plus précisément

Exemple de réduction

- Problème de la couverture de sommet
- Problème du cycle hamiltonien
- Problème de la somme de sous-ensembles

Problème du cycle hamiltonien

Cycle Hamiltonien
Données : un graphe non-orienté G.
Question : G contient-il un cycle hamiltonien ?

Problème du cycle hamiltonien

Cycle Hamiltonien
Données : un graphe non-orienté G.
Question : G contient-il un cycle hamiltonien ?

Théorème
Le problème Cycle Hamiltonien est NP-complet

Preuve:

1. Cycle Hamiltonien est dans NP.

2. VC $\leq$ Cycle Hamiltonien.

□

VC $\leq$ Cycle Hamiltonien.

- On se donne un graphe $G = (V, E)$ et un entier k
  (correspondant à une instance de VC).

- On veut construire un graphe G' en temps polynomial tel que

  il existe une couverture de sommets du graphe G
  d'au plus k sommets

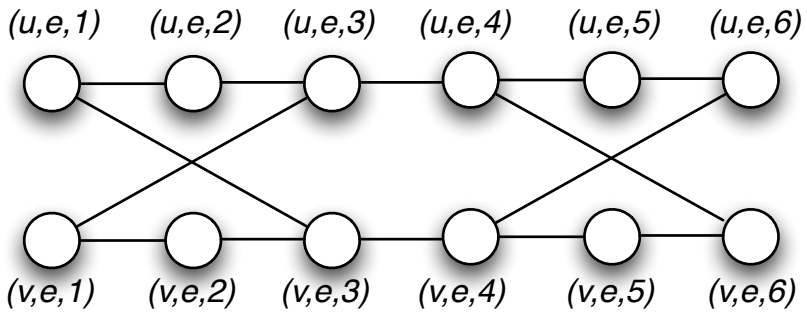
  $\Longleftrightarrow$

  le graphe G' a un cycle hamiltonien.

- Pour cela on associe un *gadget* pour représenter chaque arête de G dans G'.

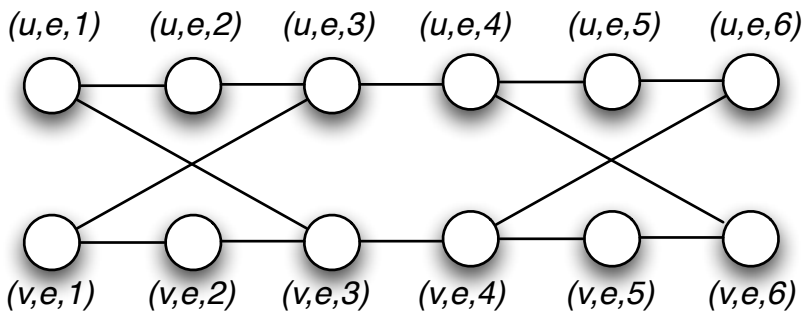
Le gadget pour une arête e

Pour chaque arête $e = (u, v)$ de G, on lui associe un *gadget* dans G' correspondant à un sous-graphe composé de 12 sommets :

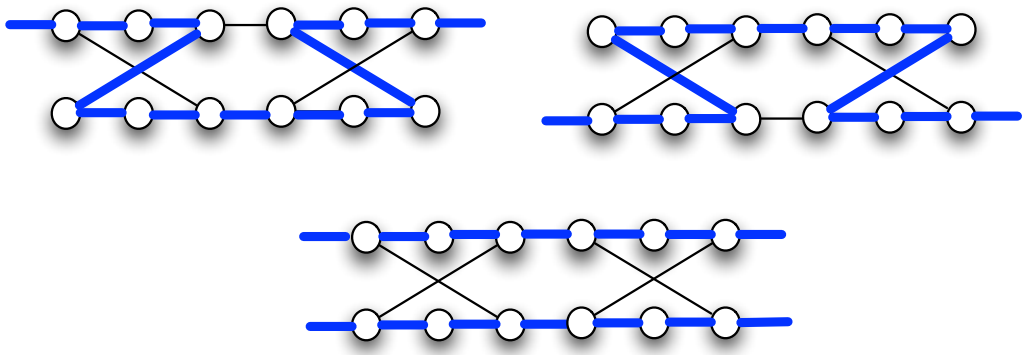


Le gadget pour une arête e

Pour chaque arête $e = (u, v)$ de G, on lui associe un *gadget* dans G' correspondant à un sous-graphe composé de 12 sommets :



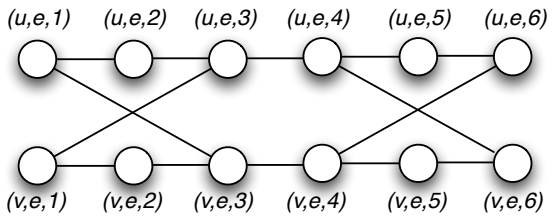
Si G' a un cycle hamiltonien, alors les seules façons de traverser du cycle dans ce gadget sont les suivantes :



Les arêtes bleues correspondent aux arêtes appartenant aux cycles.

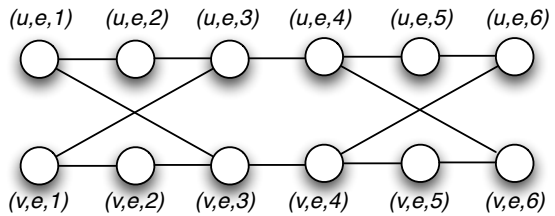
La transformation de G en G'

- G a k sommets notés $1, 2, \ldots, k$.
- Pour chaque arête e de G, créer un sous-graphe étant une copie du gadget.



La transformation de G en G'

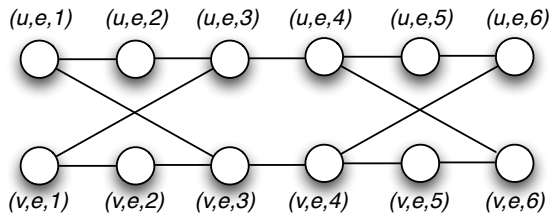
- G a k sommets notés $1, 2, \ldots, k$.
- Pour chaque arête e de G, créer un sous-graphe étant une copie du gadget.



- Pour chaque sommet u de G,
  1. Numéroter les arêtes incidentes à u : $e_1, e_2, \ldots e_d$

La transformation de G en G'

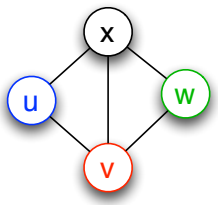
- G a k sommets notés $1, 2, \ldots, k$.
- Pour chaque arête e de G, créer un sous-graphe étant une copie du gadget.



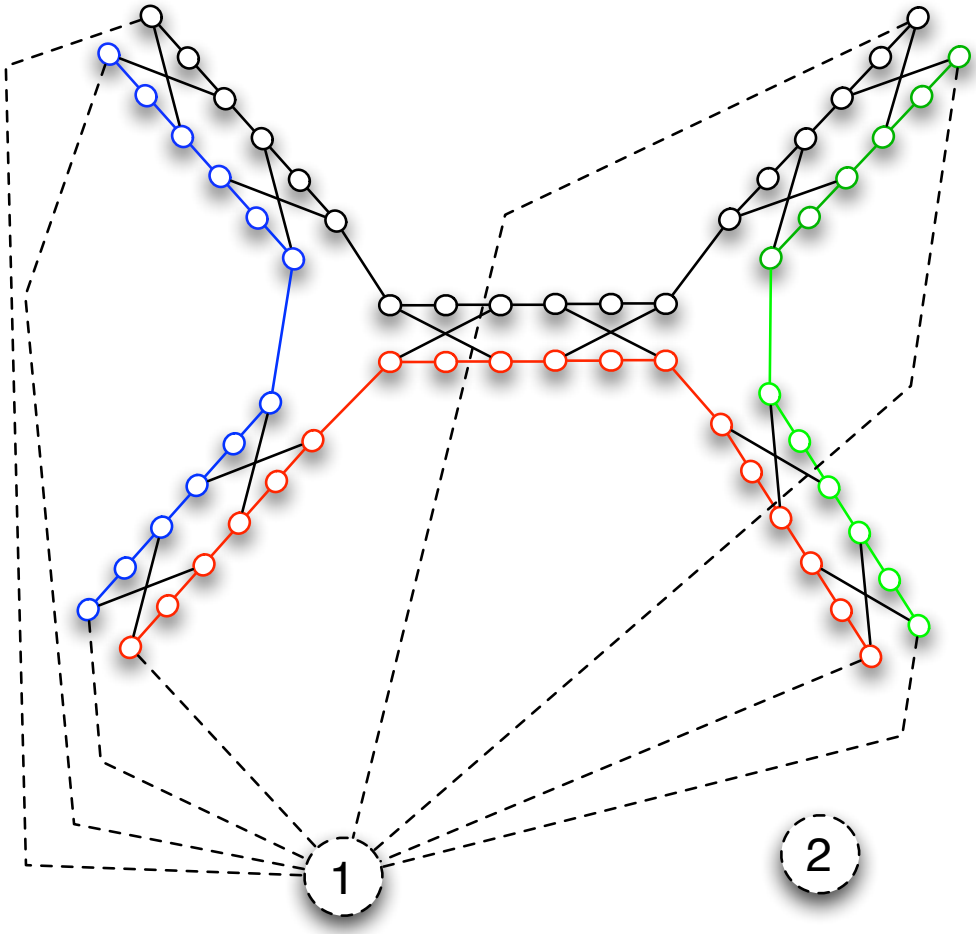
- Pour chaque sommet u de G,
  1. Numéroter les arêtes incidentes à u : $e_1, e_2, \ldots e_d$
  2. Créer un chemin entre tous les sommets de type $(u, e_i, *)$ de la façon suivante :
     - 2.1 Relier $(u, e_i, 6)$ à $(u, e_{i+1}, 1)$ par une arête (pour i allant de 1 à $d-1$)
     - 2.2 Ajouter une arête entre $(u, e_1, 1)$ et j, et une autre arête $(u, e_d, 6)$ à j (pour j allant de 1 à k)

Un exemple

Une instance (G, k) de VC :

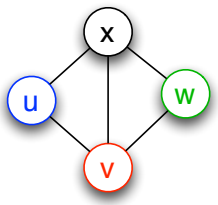


l'instance obtenue par transformation :



Un exemple

Une instance (G, k) de VC :



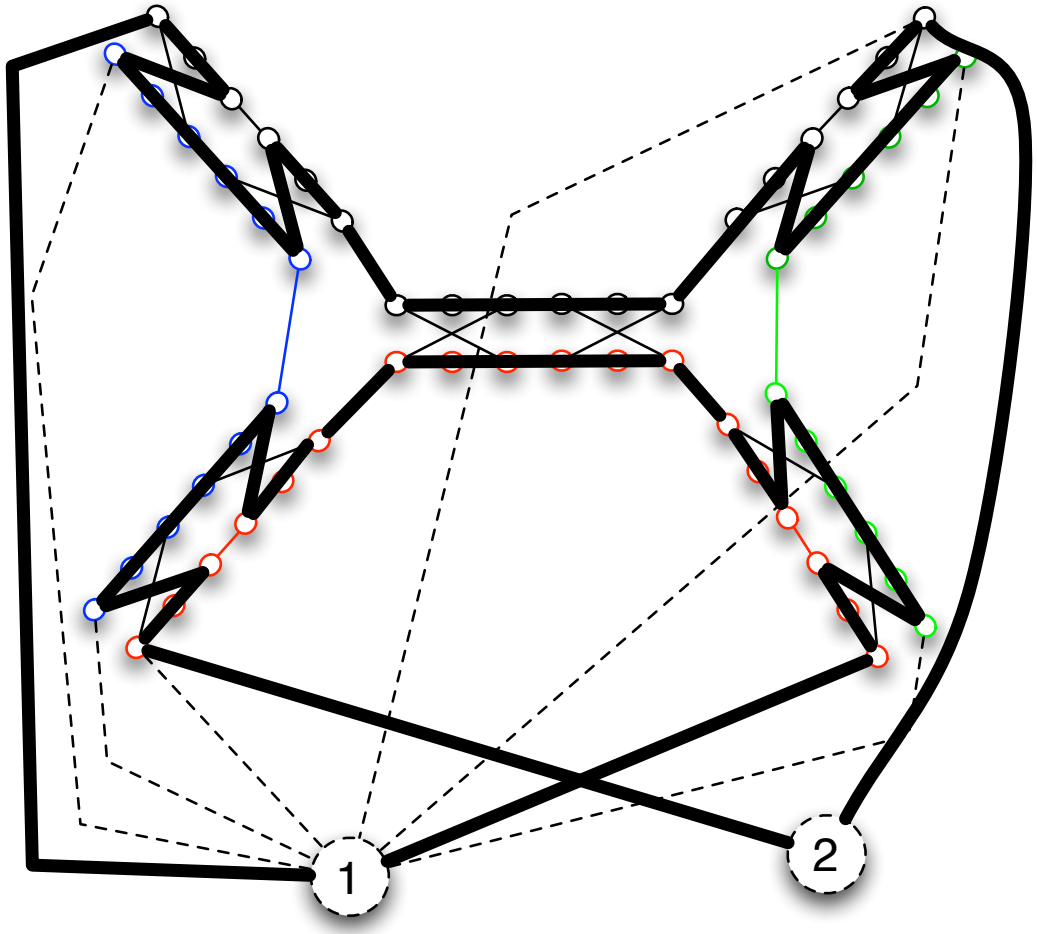
On peut prouver que

il existe une couverture de sommets du graphe G d'au plus k sommets

$\Longleftrightarrow$

G' a un cycle hamiltionien.

l'instance obtenue par transformation :



Plus précisément

Exemple de réduction

- Problème de la couverture de sommet
- Problème du cycle hamiltonien
- Problème de la somme de sous-ensembles

Somme de sous-ensembles

SOMME DE SOUS-ENSEMBLE
Données : un ensemble fini d'entiers $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_\ell\}$ et un entier $t \in \mathbb{N}$
Question : Existe-t-il un sous-ensemble $A' \subseteq A$ fonction $t : U \to \{0, 1\}$ telle que $\sum_{a \in A'} a = t$?

Théorème

Le problème SOMME DE SOUS-ENSEMBLE est NP-complet.

Preuve:

- SOMME DE SOUS-ENSEMBLE est dans NP.
- Couverture sommet $\leq$ SOMME DE SOUS-ENSEMBLE

Couverture sommet $\leq$ SOMME DE SOUS-ENSEMBLE (1/2)

- On se donne un graphe $G = (V, E)$ et un entier k.

  Il nous faut construire un ensemble d'entiers A à partir de G.

Couverture sommet $\leq$ SOMME DE SOUS-ENSEMBLE (1/2)

- On se donne un graphe $G = (V, E)$ et un entier k.

  Il nous faut construire un ensemble d'entiers A à partir de G.

Couverture sommet $\leq$ SOMME DE SOUS-ENSEMBLE (1/2)

- On se donne un graphe $G = (V, E)$ et un entier k.

  Il nous faut construire un ensemble d'entiers A à partir de G.

- Pour cela,
  - on numérote une numérotation des sommets et des arêtes entre 0 et $m - 1$.
  - pour chaque couple (arête,sommet), $b_{ij} = 1$ si l'arête i est incidente au sommet j, sinon $b_{ij} = 0$

Couverture sommet $\leq$ SOMME DE SOUS-ENSEMBLE (1/2)

- On se donne un graphe $G = (V, E)$ et un entier k.

  Il nous faut construire un ensemble d'entiers A à partir de G.

- Pour cela,
  - on numérote une numérotation des sommets et des arêtes entre 0 et $m - 1$.
  - pour chaque couple (arête,sommet), $b_{ij} = 1$ si l'arête i est incidente au sommet j, sinon $b_{ij} = 0$
- On construit l'ensemble A de la façon suivante : $(b = 4)$
  - Pour chaque sommet j : $a_j = b^m + \sum_{i=0}^{m-1} b_{ij} b^i$

Couverture sommet $\leq$ SOMME DE SOUS-ENSEMBLE (1/2)

- On se donne un graphe $G = (V, E)$ et un entier k.

  Il nous faut construire un ensemble d'entiers A à partir de G.

- Pour cela,
  - on numérote une numérotation des sommets et des arêtes entre 0 et $m - 1$.
  - pour chaque couple (arête,sommet), $b_{ij} = 1$ si l'arête i est incidente au sommet j, sinon $b_{ij} = 0$
- On construit l'ensemble A de la façon suivante : $(b = 4)$
  - Pour chaque sommet j : $a_j = b^m + \sum_{i=0}^{m-1} b_{ij} b^i$

- On construit l'entier t :

$$t = \underbrace{k b^m}_{\text{cardinalite de la couverture}} + \sum_{i=0}^{m-1} \underbrace{2 b^i}_{\text{combien de sommets couvrent } i}$$

Couverture sommet $\leq$ SOMME DE SOUS-ENSEMBLE (1/2)

- On se donne un graphe $G = (V, E)$ et un entier k.

  Il nous faut construire un ensemble d'entiers A à partir de G.

- Pour cela,
  - on numérote une numérotation des sommets et des arêtes entre 0 et $m - 1$.
  - pour chaque couple (arête,sommet), $b_{ij} = 1$ si l'arête i est incidente au sommet j, sinon $b_{ij} = 0$
- On construit l'ensemble A de la façon suivante : $(b = 4)$
  - Pour chaque sommet j : $a_j = b^m + \sum_{i=0}^{m-1} b_{ij} b^i$
  - Pour chaque arête j : est associé l'entier b^i
- On construit l'entier t :

$$t = \underbrace{k b^m}_{\text{cardinalite de la couverture}} + \sum_{i=0}^{m-1} \underbrace{2 b^i}_{\text{combien de sommets couvrent } i}$$

Couverture sommet $\leq$ SOMME DE SOUS-ENSEMBLE (2/2)

- La réduction se fait en temps polynomial :
  - pour chaque arête et pour chaque sommet, est construit un entier codé en base 4

en $\mathcal{O}(|E|)$ opérations

- On peut prouver :

il existe une couverture sommet du graphe G de cardinalité k

$$\Longleftrightarrow$$

il existe un sous-ensemble $A' \subseteq A$ tel que $\sum_{a \in A'} a = t$