Introduction aux graphes

Johanne Cohen[1]

[1]LRI-CNRS, Université Paris-Sud, Université Paris-Saclay, France.

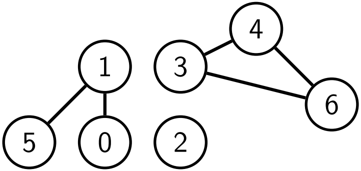
Plan

1. Rappel sur la théorie des graphes
   - Les graphes
   - Les arbres

2. Représentation des graphes
   - Matrice d'adjacences
   - Liste de successeurs

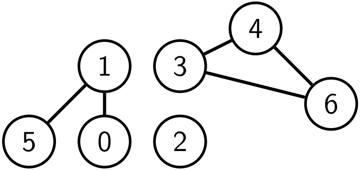
Un graphe

- Un graphe[1] donné par un couple $G = (V, E)$, où
  - V est un ensemble.
  - $E \subset V \times V$ est un ensemble de paires $\{u, v\}$ avec $u, v \in V$.
- Les éléments de V sont appelés des sommets (ou nœuds).
- Les éléments de E sont appelés des arêtes.
- La paire $\{u, v\}$ peut être représentée par (u, v) ou (v, u).
  Autrement dit, (u, v) et (v, u) dénotent la même arête.
- Exemple :
  - $V = \{0, 1, \ldots, 6\}$
  - $E = \{(0, 1), (3, 4), (5, 1), (6, 3), (6, 4)\}$.



1. Lorsqu'on ne précise pas, par défaut, un graphe est non-orienté.

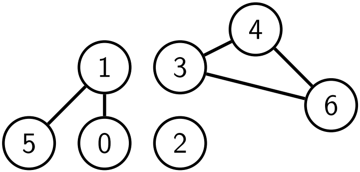
Vocabulaire



- u et v sont dits voisins s'il y a une arête entre u et v.
- Le degré de u est le nombre de voisins de u.

- Remarque : (sauf autre convention explicite)
  - Les boucles ne sont pas autorisées.

Vocabulaire : chemins et cycles



- Un chemin du sommet s vers le sommet t est une suite $e_0, e_1, \cdots, e_n$ de sommets telle que

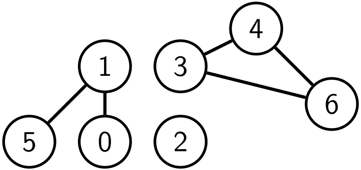
$$e_0 = s,\ e_n = t,\ (e_{i-1}, e_i) \in E, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n.$$

  - n est appelé la longueur du chemin,
  - on dit que t est joignable à partir de s.
  - Le chemin est dit simple si les e_i sont distincts deux-à-deux.

- Un cycle est un chemin de longueur non-nulle avec $e_0 = e_n$.
- s est dit à distance n de t s'il existe un chemin de longueur n entre s et t, mais aucun chemin de longueur inférieure.

Vocabulaire : composantes connexes

- La relation “être joignable” est une relation d’équivalence.
- Les classes d’équivalence sont appelées les composantes connexes.

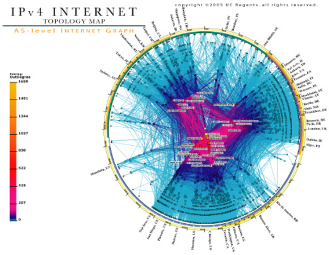


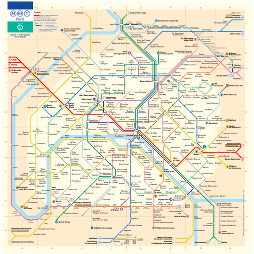
- Un graphe est dit connexe s’il n’y a qu’une seule classe d’équivalence.
    - Autrement dit, tout sommet est joignable à partir de tout sommet.

Les graphes sont partout !

- Beaucoup de problèmes se modélisent par des objets et des relations entre objets.

- Exemples :
  - Le graphe routier.
  - Les réseaux informatiques.
  - Le graphe du web.



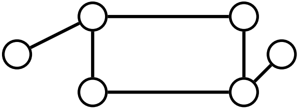


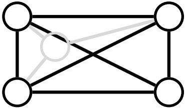
Les graphes sont partout !

- Beaucoup de problèmes se modélisent par des objets et des relations entre objets.
- Exemples :
  - Le graphe routier.
  - Les réseaux informatiques.
  - Le graphe du web.
- Beaucoup de problèmes se ramènent à des problèmes sur les graphes.
- Théorie des graphes :
  - Euler, Hamilton, Kirchhoff, König, Edmonds, Berge, Lovász, Seymour,. . .
- Les graphes sont omniprésents en informatique.

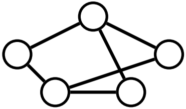
Type de graphes

- Un graphe est dit planaire s'il peut se représenter sur un plan sans qu'aucune arête n'en croise une autre.

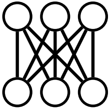




- Un graphe est dit biparti si l'ensemble V des sommets est partitionné en deux sous-ensembles A et B telle que chaque arête ait une extrémité dans A et l'autre dans B.

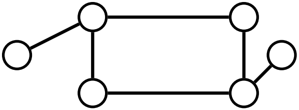


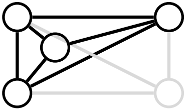
$K_{3,3}$



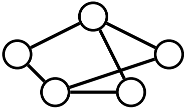
Type de graphes

- Un graphe est dit planaire s'il peut se représenter sur un plan sans qu'aucune arête n'en croise une autre.

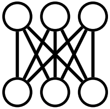




- Un graphe est dit biparti si l'ensemble V des sommets est partitionné en deux sous-ensembles A et B telle que chaque arête ait une extrémité dans A et l'autre dans B.

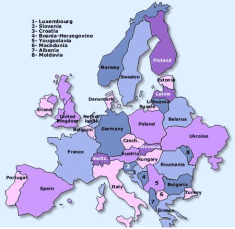


$K_{3,3}$



Exemple : Coloriage de graphe.

- Allouer des fréquences GSM correspond à colorier les sommets d'un graphe (planaire).
  - sommets : des émetteurs radio.
  - arête entre u et v : le signal de u perturbe v ou réciproquement.
  - couleur : fréquence radio.
- Le problème de coloriage d'un graphe : colorier les sommets d'un graphe de telle sorte qu'il n'y ait aucune arête entre deux sommets d'une même couleur.

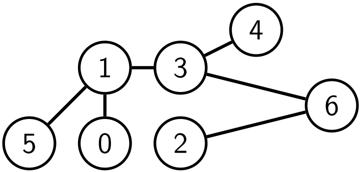


Un coloriage avec 4 couleurs

Les arbres sont partout !

- Un graphe connexe sans cycle est appelé un arbre.
- Un graphe sans-cycle est appelé une forêt :
  - chacune de ses composantes connexes est un arbre.

- Dès qu'on a des objets, des relations entre objets, et pas de cycle, on a donc un arbre ou une forêt.

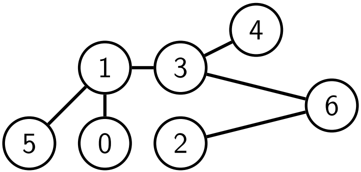


- Les arbres sont omniprésents en informatique.

Les arbres sont partout !

- Un graphe connexe sans cycle est appelé un arbre.
- Un graphe sans-cycle est appelé une forêt :
  - chacune de ses composantes connexes est un arbre.

- Dès qu'on a des objets, des relations entre objets, et pas de cycle, on a donc un arbre ou une forêt.

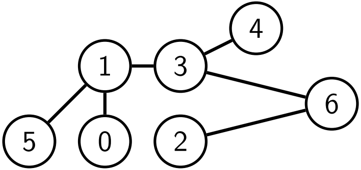


- Les arbres sont omniprésents en informatique.

Les arbres sont partout !

- Un graphe connexe sans cycle est appelé un arbre.
- Un graphe sans-cycle est appelé une forêt :
  - chacune de ses composantes connexes est un arbre.

- Dès qu'on a des objets, des relations entre objets, et pas de cycle, on a donc un arbre ou une forêt.

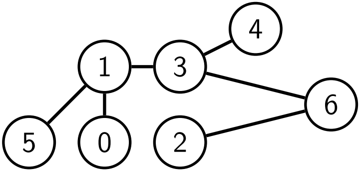


- Les arbres sont omniprésents en informatique.

Quelques propriétés

Soit $G = (V, E)$ un graphe.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- G est un arbre ;
- G est connexe, mais ne l'est plus si on enlève n'importe laquelle de ses arêtes ;
- G est connexe et $|E| = |V| - 1$;
- G est sans cycle et $|E| = |V| - 1$;



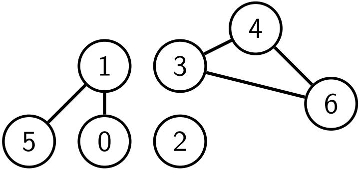
Plan

Représentation des graphes : matrice d'adjacence

Soit $G = (V, E)$ avec $V = \{1, 2, \ldots, n\}$,

- G peut être représenté par une matrice M $n \times n$.

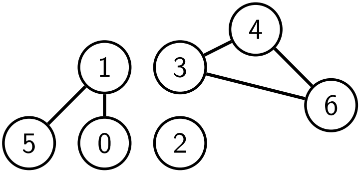
$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Représentation des graphes : liste de successeurs

- On associe à chaque sommet i, la liste des sommets j tels que $(i, j) \in E$.



- $L[0] = (1)$
- $L[1] = (0, 5)$
- $L[2] = ()$
- $L[3] = (4, 6)$
- $L[4] = (3, 6)$
- $L[5] = (1)$
- $L[6] = (3, 4)$

Meilleure représentation ?

- Matrice : mémoire $O(n^2)$
- Listes : mémoire $O(n+m)$

où n nombre de sommets, m nombre d'arêtes.

- Quelle est la meilleure représentation ?

Cela dépend du contexte.

	La méthode plus efficace est
Tester si (u, v) est dans le graphe.	matrice d'adjacences
Tester si calculer le degré de v	liste de successeurs
Stocker des graphes denses	matrice d'adjacences
Stocker des graphes creux	liste de successeurs
Insérer ou supprimer des arêtes	matrice d'adjacences