Introduction à la théorie des jeux

Johanne Cohen

PRiSM/CNRS, Versailles, France.

Références.

Noam Nisan, Tim Roughgarden, Eva Tardos, Vijay V. Vazirani
Algorithmic Game Theory
Cambridge University Press 2008.

Levente Buttyan, Jean-Pierre Hubaux Shepherd
Security and Cooperation in Wireless Networks
Cambridge University Press 2007.

Timothy G. Griffin, F. Bruce Shepherd, Gordon Wilfong
The Stable Paths Problem and Interdomain Routing.
IEEE/ACM Transactions on Networking 2002.

J. Cohen, Anurag Dasgupta, Sukumar Ghosh, Sébastien Tixeuil
An exercise in selfish stabilization.
ACM Transactions on Autonomous and Adaptive Systems 2008.

Aujourd'hui

Problème du plus court chemin

- Définition dans le contexte du routage interdomaine
- Définition sous forme de jeu

Équilibre de Nash

- Équilibre de Nash pur
- Equilibre de Nash mixte

Les jeux "classiques"

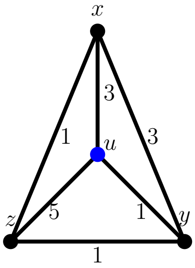
- Dilemme des prisonniers
- Pennies matching

1. Problème du plus court chemin

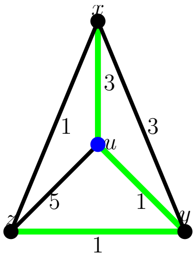
Instance :

- Let $G = (V, E)$ be a graph and let u be a vertex in V
- Let w be a weighted function : $E \rightarrow \mathbb{N}$.

Purpose : to find the shortest path tree T.



Instance

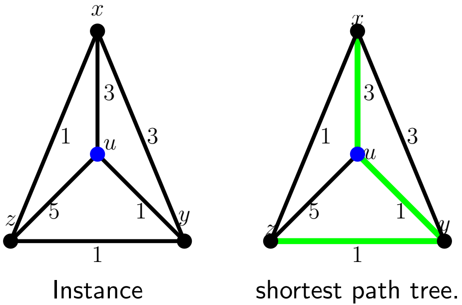


shortest path tree.

Instance :

- Let $G = (V, E)$ be a graph and let u be a vertex in V
- Let w be a weighted function : $E \to \mathbb{N}$.

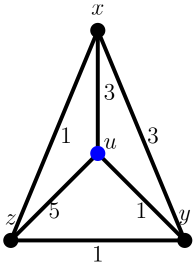
Purpose : to find the shortest path tree T.



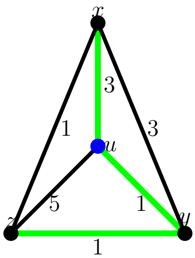
- There exist some centralized polynomial time algorithms
- and also some distributed (and self-stabilizing) algorithms.

Au point de vue de l'algorithmique classique,

Tous les nœuds ont le même objectif



Donnée

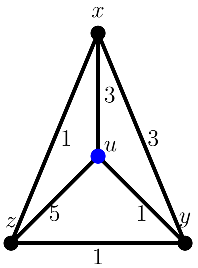


arbre de plus court chemins.

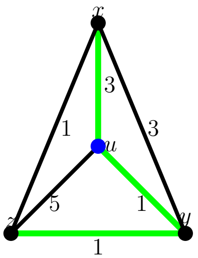
Au point de vue de l'algorithmique classique,

Tous les nœuds ont le même objectif

objectif global = objectif local



Donnée



arbre de plus court chemins.

Au point de vue de l'algorithmique classique,

Tous les nœuds ont le même objectif

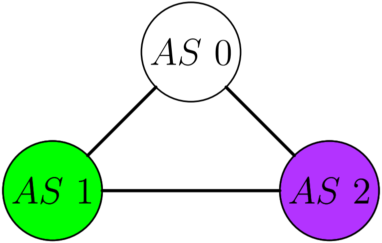
objectif global $=$ objectif local

Au point de vue de la théorie des jeux

Tous les nœuds ont des intérêts différents

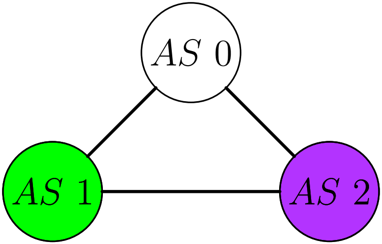
objectif global $\neq$ objectif local

Questions à se poser :



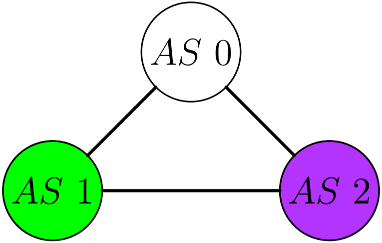
Questions à se poser :

1. Qui joue ?



Questions à se poser :

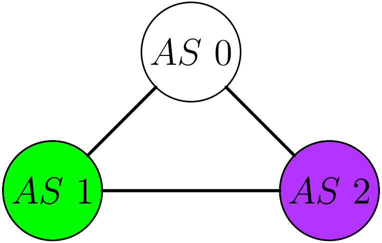
1. Qui joue ? **les nœuds du graphe**



Au point de vue de la théorie des jeux

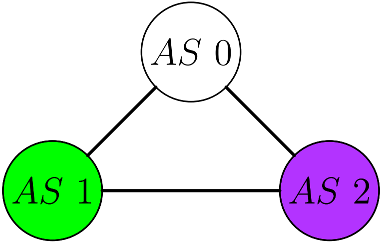
Questions à se poser :

1. Qui joue ? **les nœuds du graphe**
2. Pour chaque joueur :



Questions à se poser :

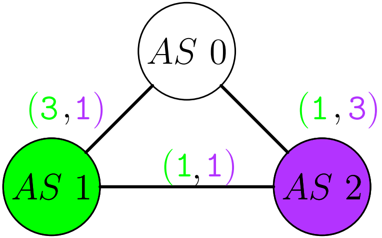
1. Qui joue ? **les nœuds du graphe**
2. Pour chaque joueur :
    2.1 Comment modéliser les préférences ?



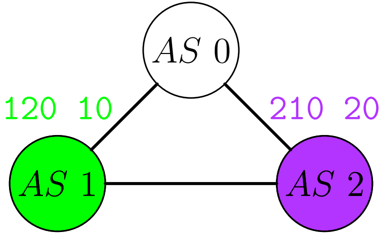
Questions à se poser :

1. Qui joue ? **les nœuds du graphe**
2. Pour chaque joueur :
   2.1 Comment modéliser les préférences ? **fonction d'utilité**

Poids sur les arêtes



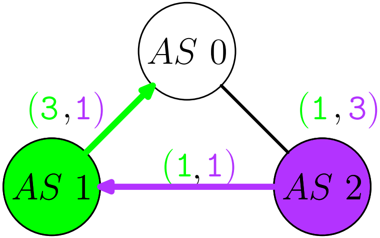
Ordre sur les chemins



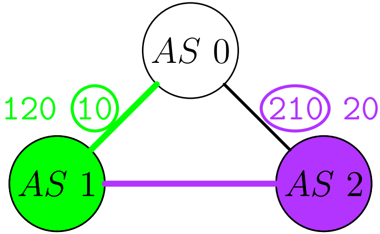
Questions à se poser :

1. Qui joue ? **les nœuds du graphe**
2. Pour chaque joueur :
    2.1 Comment modéliser les préférences ? **fonction d'utilité**
    2.2 Quelles sont les actions/stratégies ?

Arcs



Chemins

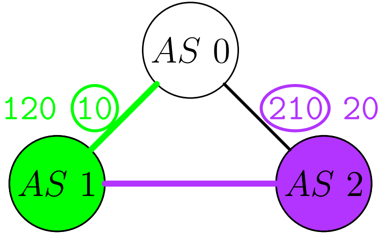


Au point de vue de la théorie des jeux

Questions à se poser :

1. Qui joue ? **les nœuds du graphe**
2. Pour chaque joueur :
   2.1 Comment modéliser les préférences ? **fonction d'utilité**
   2.2 Quelles sont les actions/stratégies ?

Chemins



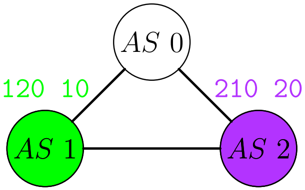
Stable path problem and interdomain Routing [Griffin2002]

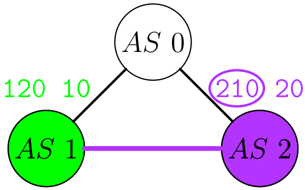
Instance :

- $G = (V, E)$ is a simple, undirected graph.
- each node has a set of permitted paths and a ranking-function

Purpose : all nodes attempt to establish a path to a particular node `AS 0`.

If v chooses $P = r.Q$, then it implies that r chooses Q.





Suite

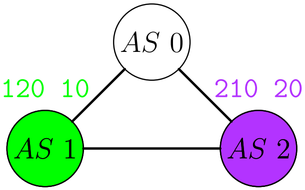
Stable path problem and interdomain Routing [Griffin2002]

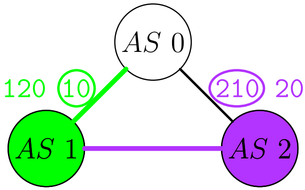
Instance :

- $G = (V, E)$ is a simple, undirected graph.
- each node has a set of permitted paths and a ranking-function

Purpose : all nodes attempt to establish a path to a particular node `AS 0`.

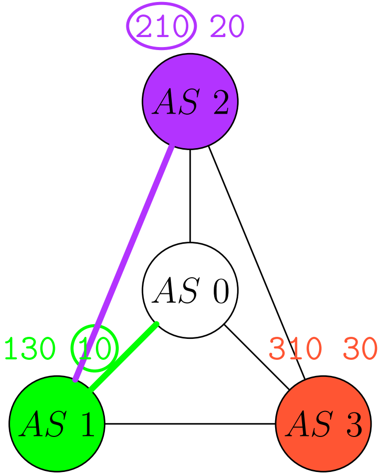
If v chooses $P = r.Q$, then it implies that r chooses Q.





Suite

Plus précisément,

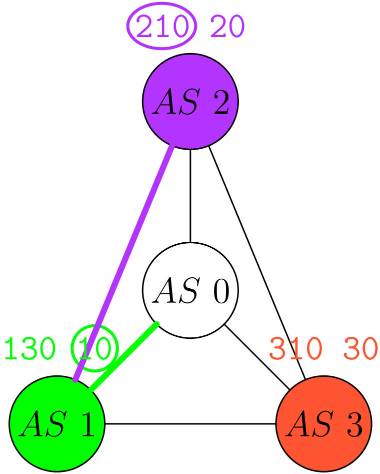


Trois joueurs : **AS 1**, **AS 2**, **AS 3**

Pour atteindre `AS 0`,

1. L'**AS 1** choisit le chemin **10**.
2. L'**AS 2** choisit le chemin **210**.

Plus précisement,



Trois joueurs : **AS 1**, **AS 2**, **AS 3**

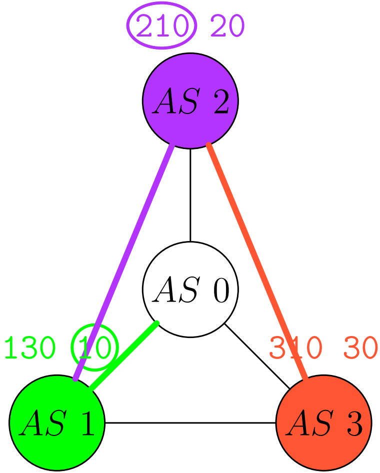
Pour atteindre `AS 0`,

1. L'**AS 1** choisit le chemin **10**.
2. L'**AS 2** choisit le chemin **210**.

   OK car

   - le chemin **210** est autorisé par **AS 2**
   - **10** a été choisit par **AS 1**

Plus précisément,

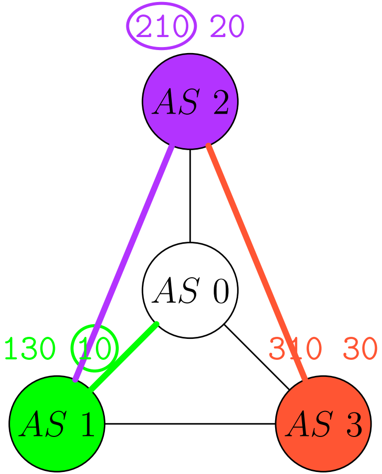


Trois joueurs : **AS 1**, **AS 2**, **AS 3**

Pour atteindre `AS 0`,

1. L'**AS 1** choisit le chemin **10**.
2. L'**AS 2** choisit le chemin **210**.
3. L'**AS 3** choisit le chemin **3210**.

Plus précisement,

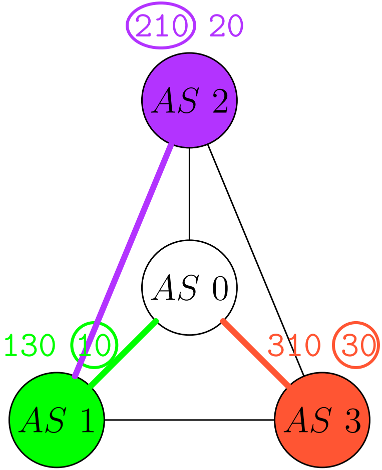


Trois joueurs : **AS 1**, **AS 2**, **AS 3**

Pour atteindre `AS 0`,

1. L'**AS 1** choisit le chemin **10**.
2. L'**AS 2** choisit le chemin **210**.
3. L'**AS 3** choisit le chemin **3210**.
   ¬OK car
   - **3210** n'est pas autorisé par **AS 3**

Plus précisement,

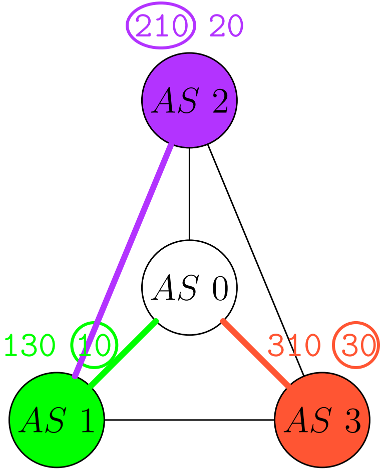


Trois joueurs : **AS 1**, **AS 2**, **AS 3**

Pour atteindre `AS 0`,

1. L'**AS 1** choisit le chemin **10**.
2. L'**AS 2** choisit le chemin **210**.
3. L'**AS 3** choisit le chemin **30**.
   OK car
   - le chemin **30** est autorisé par **AS 3**

Plus précisément,



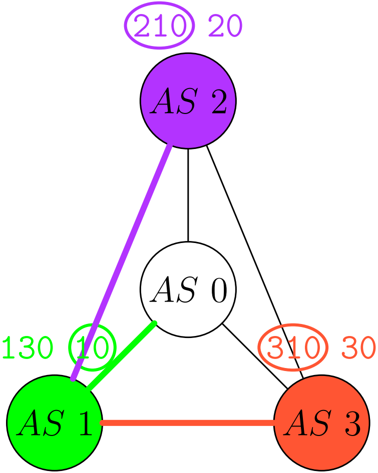
Trois joueurs : **AS 1**, **AS 2**, **AS 3**

Pour atteindre `AS 0`,

1. L'**AS 1** choisit le chemin **10**.
2. L'**AS 2** choisit le chemin **210**.
3. L'**AS 3** choisit le chemin **30**.

MAIS **AS 3** préfère **310** à celui **30**

Plus précisément,



Trois joueurs : **AS 1**, **AS 2**, **AS 3**

Pour atteindre `AS 0`,

1. L'**AS 1** choisit le chemin **10**.
2. L'**AS 2** choisit le chemin **210**.
3. L'**AS 3** choisit le chemin **310**.

Un jeu à n joueurs

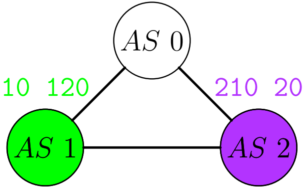
Chaque joueur i possède

- un ensemble d'actions S_i
- une utilité u_i : une fonction $S_1 \times \cdots \times S_n \rightarrow \mathbb{N}$

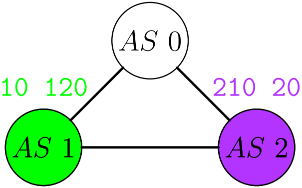
Définition : $s = (s_1, \cdots, s_n)$ est un profil si $s \in S_1 \times \cdots \times S_n$,

$$(s_i, s_{-i}) = (s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n)$$

- 2 joueurs **AS 2**, **AS 1**
- $S_{\textbf{AS 1}} = \{10, 120\}$
- $s = (10, 20)$

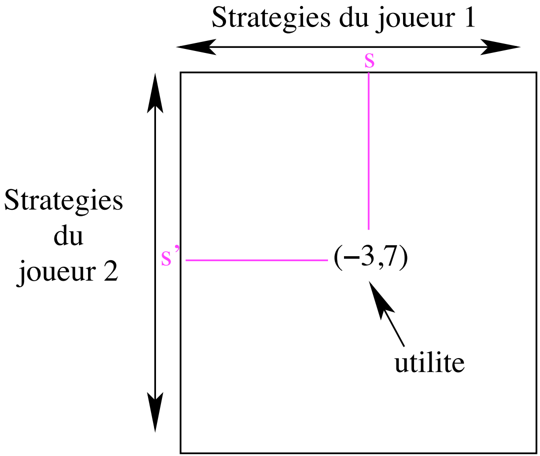


Fonction d'utilité.



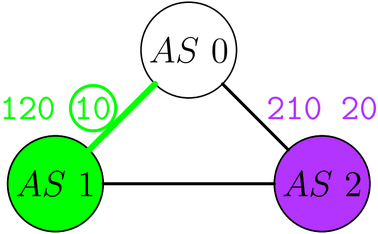
		AS 2	
		210	20
AS 1	10	(2 , 2)	(2 , 1)
	120	(-1 , -1)	(1 , 2)

Visualisation du jeu : forme stratégique.



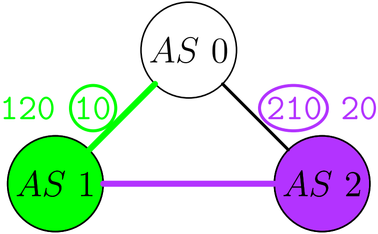
Généralisation à plusieurs joueurs.

Si **AS 1** joue la stratégie 10



Si **AS 1** joue la stratégie 10

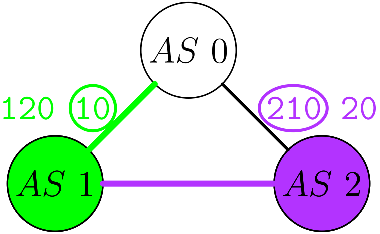
alors **AS 2** joue 210



Comportement rationnel.

Si **AS 1** joue la stratégie 10

alors **AS 2** joue 210



L'**AS 2** a un comportement rationnel.

Comportement rationnel d'un joueur : comportement consistant à choisir toujours la stratégie la plus favorable parmi celles à jouer.

		AS 2	
		210	20
AS 1	10	(2 , 2)	(2 , 1)
	120	(-1 , -1)	(1 , 2)

Comparaison entre les $\neq$ stratégies

		AS 2	
		210	20
AS 1	10	(2 , 2)	(2 , 1)
	120	(-1 , -1)	(1 , 2)

La stratégie 10 domine la stratégie 120.

		AS 2	
		210	20
AS 1	10	(2 , 2)	(2 , 1)
	120	(-1 , -1)	(1 , 2)

AS 1 choisira toujours la stratégie 10.

		AS 2	
		210	20
AS 1	10	(2 , 2)	(2 , 1)
[redacted]			

Comparaison entre les ≠ stratégies

		AS 2	
		210	20
AS 1	10	(2 , 2)	(2 , 1)

[redacted]

La stratégie 210 domine la stratégie 20.

Comparaison entre les $\neq$ stratégies

		AS 2	
		210	20
AS 1	10	(2 , 2)	(2 , 1)
[redacted]			

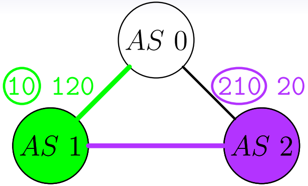
AS 2 choisira toujours la stratégie 210.

AS 2

		210	20
AS 1	10	(2 , 2)	[redacted]
[redacted]			

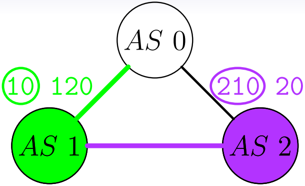
le profil (10,210) est un équilibre.

Le profil (10,210) est un équilibre.



est un équilibre car :

Le profil (10,210) est un équilibre.

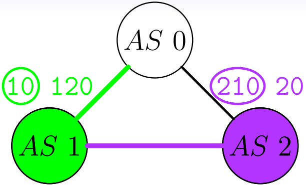


est un équilibre car :

Si pour AS 2, les choix des autres AS sont fixés,

AS 2 a-t-il intérêt de changer son choix ?

Le profil (10,210) est un équilibre.



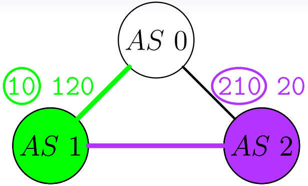
est un équilibre car :

Si pour AS 2, les choix des autres AS sont fixés,

AS 2 a-t-il intérêt de changer son choix ?

NON

Le profil (10,210) est un équilibre.



est un équilibre car :

Si pour AS 2, les choix des autres AS sont fixés,

AS 2 a-t-il intérêt de changer son choix ?

NON

Si pour AS 1, les choix des autres AS sont fixés,

AS 1 a-t-il intérêt de changer son choix ?

NON

2. Équilibre de Nash (NE)

2. Équilibre de Nash (NE)

pur ou mixte

De façon informelle

Soit s un profil,

Les meilleures réponses d'un joueur i par rapport à s

correspondent aux stratégies

ayant la plus grande utilité

par rapport aux choix des autres joueurs.

De façon informelle

Soit s un profil,

Les meilleures réponses d'un joueur i par rapport à s

correspondent aux stratégies

ayant la plus grande utilité

par rapport à s_{-i}.

De façon informelle

Soit s un profil,

Les meilleures réponses d'un joueur i par rapport à s

correspondent aux stratégies

ayant la plus grande utilité

par rapport à s_{-i}.

$\boxed{\text{Équilibre} = \text{meilleures réponses mutuelles}}$

Équilibre de Nash pur

Soit un jeu de n joueurs tel que pour chaque joueur i

- un ensemble d'actions S_i
- une utilité $u_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{N}$

Un équilibre de Nash (NE) est un profil $s = (s_1, \cdots, s_n)$ tel que $\forall i$, $\forall s_i' \in S_i,\ u_i(s_1, \cdots, s_i, \cdots, s_n) \geq u_i(s_1, \cdots, s_i', \cdots, s_n)$.

Équilibre de Nash pur

Soit un jeu de n joueurs tel que pour chaque joueur i

- un ensemble d'actions S_i
- une utilité $u_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{N}$

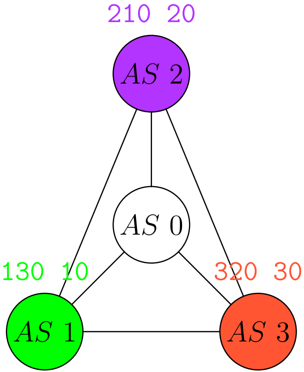
Un équilibre de Nash (NE) est un profil $s = (s_1, \cdots, s_n)$ tel que

$$\forall i,\ \forall s'_i \in S_i,\ u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}).$$

Stable path problem and interdomain Routing [Griffin2002]

Result 1 :

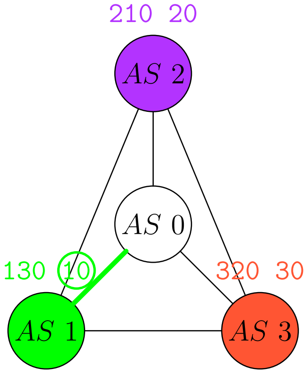
There exist some instances such that no equilibrium exists.



Stable path problem and interdomain Routing [Griffin2002]

Result 1 :

There exist some instances such that no equilibrium exists.

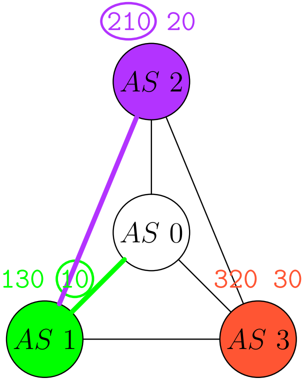


By contradiction, assume that there exists a stable tree T. If edge (`AS 1, AS 0`) is in T, then

Stable path problem and interdomain Routing [Griffin2002]

Result 1 :

There exist some instances such that no equilibrium exists.



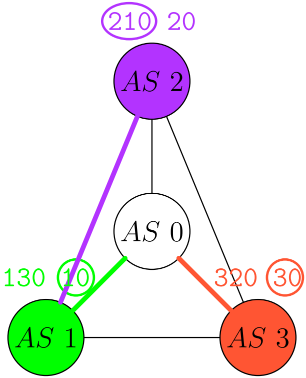
By contradiction, assume that there exists a stable tree T. If edge `(AS 1, AS 0)` is in T, then

- edge `(AS 2, AS 1)` is in T

Stable path problem and interdomain Routing [Griffin2002]

Result 1 :

There exist some instances such that no equilibrium exists.

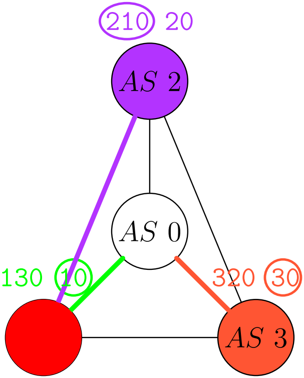


By contradiction, assume that there exists a stable tree T. If edge `(AS 1, AS 0)` is in T, then

- edge `(AS 2, AS 1)` is in T
- edge `(AS 3, AS 0)` is in T

Stable path problem and interdomain Routing [Griffin2002]

Result 1 :
There exist some instances such that no equilibrium exists.



By contradiction, assume that there exists a stable tree T. If edge `(AS 1, AS 0)` is in T, then

- edge `(AS 2, AS 1)` is in T
- edge `(AS 3, AS 0)` is in T
- there is a contradiction.

Stable path problem and interdomain Routing [Griffin2002]

Result 1 :

There exist some instances such that no equilibrium exists.

Theorem

The problem of deciding the existence of stable routing function is NP-complete.

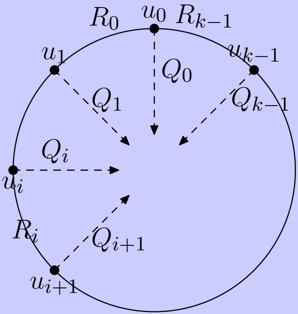
Stable path problem and interdomain Routing [Griffin2002]

Result 1 :

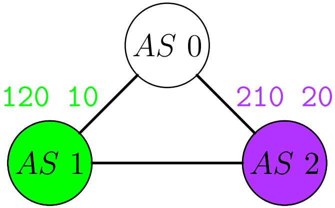
There exist some instances such that no equilibrium exists.

Theorem

No dispute wheel implies an unique stable routing function. It can be computed by self-stabilizing (greedy) algorithm.

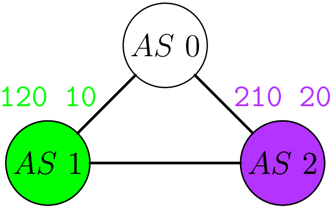


Exemple : guerre des sexes



		AS 2	
		210	20
AS 1	120	(-2 , -2)	(2 , 1)
	10	(1 , 2)	(1 , 1)

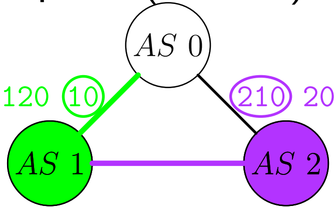
Exemple : guerre des sexes

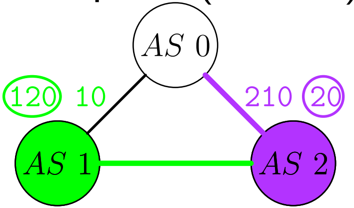


		AS 2	
		210	20
AS 1	120	(-2 , -2)	(2 , 1)
	10	(1 , 2)	(1 , 1)

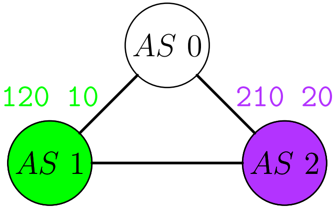
Deux équilibres

profil (10,210) et profil (120,20)





Exemple : guerre des sexes



AS 2

AS 1	210	20
120	(-2 , -2)	(2 , 1)
10	(1 , 2)	(1 , 1)

Deux équilibres

profil (10,210) et profil (120,20)

Comment les comparer ?

si le choix n'est pas déterministe...

		AS 2	
		210	20
AS 1	120	(-2 , -2)	(2 , 1)
	10	(1 , 2)	(1 , 1)

AS 1 choisit $\begin{cases} 120 & \text{avec la probabilité } q \\ 10 & \text{avec la probabilité } 1-q \end{cases}$

Quelle est la situation de AS 2 ?

Quand AS 2 doit-il choisir 210 ?

si le choix n'est pas déterministe...

		AS 2	
		210	20
AS 1	120	(-2 , -2)	(2 , 1)
	10	(1 , 2)	(1 , 1)

AS 1 choisit $\begin{cases} 120 & \text{avec la probabilité } q \\ 10 & \text{avec la probabilité } 1-q \end{cases}$

Quelle est la situation de AS 2 ?

Si AS 2 choisit 210, espérance de son utilité $= -2q + 2(1-q)$

Si AS 2 choisit 20, espérance de son utilité $= 2q + (1-q)$

Quand AS 2 doit-il choisir 210 ?

si le choix n'est pas déterministe...

	AS 2	
AS 1	210	20
120	(-2 , -2)	(2 , 1)
10	(1 , 2)	(1 , 1)

$$\text{AS 1 choisit} \begin{cases} 120 & \text{avec la probabilité } q \\ 10 & \text{avec la probabilité } 1-q \end{cases}$$

Quelle est la situation de AS 2 ?

Si AS 2 choisit 210, espérance de son utilité $= -2q + 2(1-q)$

Si AS 2 choisit 20, espérance de son utilité $= 2q + (1-q)$

Quand AS 2 doit-il choisir 210 ?

Si $-2q + 2(1-q) > 2q + (1-q)$, c'est-à-dire

si le choix n'est pas déterministe...

		AS 2	
		210	20
AS 1	120	(-2 , -2)	(2 , 1)
	10	(1 , 2)	(1 , 1)

$$\text{AS 1 choisit} \begin{cases} 120 & \text{avec la probabilité } q \\ 10 & \text{avec la probabilité } 1-q \end{cases}$$

Quelle est la situation de AS 2 ?

Si AS 2 choisit 210, espérance de son utilité $= -2q + 2(1-q)$

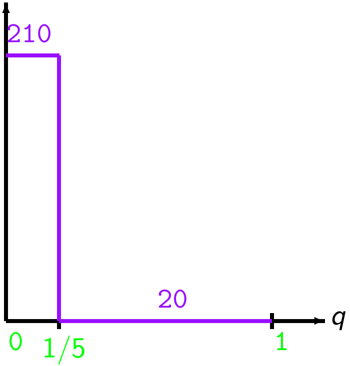
Si AS 2 choisit 20, espérance de son utilité $= 2q + (1-q)$

Quand AS 2 doit-il choisir 210 ?

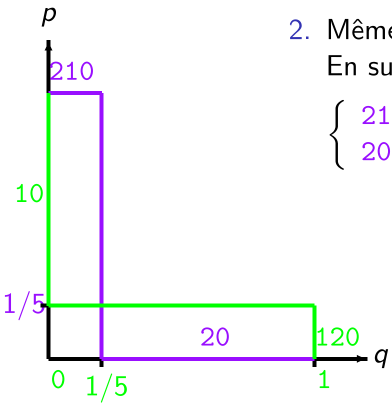
si $1/5 > q$

si le choix n'est pas déterministe...

1. AS 2 choisit 210 si $1/5 > q$



si le choix n'est pas déterministe...

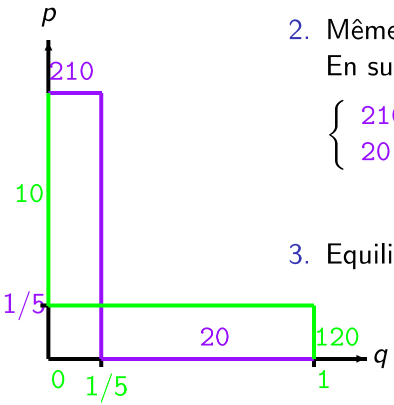


1. AS 2 choisit 210 si $1/5 > q$
2. Même raisonnement que précédement :
   En supposant que AS 2 choisit

$$\begin{cases} 210 & \text{avec la probabilité } p \\ 20 & \text{avec la probabilité } 1-p \end{cases},$$

AS 1 choisit 120 si $1/5 > p$

si le choix n'est pas déterministe...

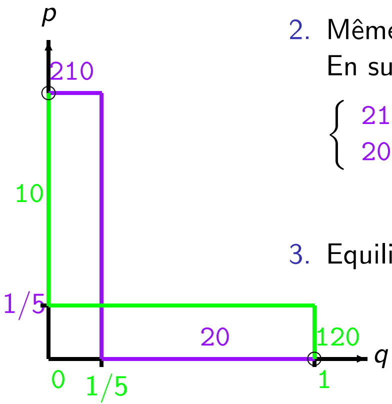


1. AS 2 choisit 210 si $1/5 > q$
2. Même raisonnement que précédement :
   En supposant que AS 2 choisit

   $$\begin{cases} 210 & \text{avec la probabilité } p \\ 20 & \text{avec la probabilité } 1-p \end{cases},$$

   AS 1 choisit 120 si $1/5 > p$
3. Equilibre de Nash = intersection des courbes

si le choix n'est pas déterministe...



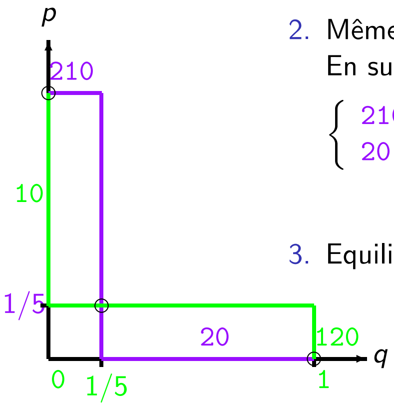
1. AS 2 choisit 210 si $1/5 > q$
2. Même raisonnement que précédement :
   En supposant que AS 2 choisit

   $$\begin{cases} 210 & \text{avec la probabilité } p \\ 20 & \text{avec la probabilité } 1-p \end{cases},$$

   AS 1 choisit 120 si $1/5 > p$
3. Equilibre de Nash = intersection des courbes

   2 équilibres de Nash purs

si le choix n'est pas déterministe...



1. AS 2 choisit 210 si $1/5 > q$
2. Même raisonnement que précédement :
   En supposant que AS 2 choisit

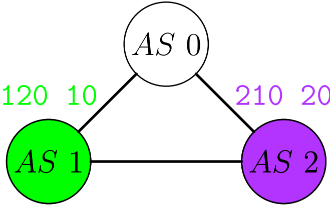
   $$\begin{cases} 210 & \text{avec la probabilité } p \\ 20 & \text{avec la probabilité } 1-p \end{cases},$$

   AS 1 choisit 120 si $1/5 > p$
3. Equilibre de Nash = intersection des courbes

   2 équilibres de Nash purs

   1 équilibre de Nash mixte

si le choix n'est pas déterministe...



AS 1 \ AS 2	210	20
120	(-2 , -2)	(2 , 1)
10	(1 , 2)	(1 , 1)

- 2 équilibres de Nash purs : (10,210) et (120,20)
- et un mixte : $((\frac{4}{5} : 10, \frac{1}{5} : 120), (\frac{4}{5} : 20, \frac{1}{5} : 210))$

utilité moyenne de AS 1$= \frac{1}{5}(\frac{-2}{5} + \frac{8}{5}) + \frac{4}{5}(\frac{1}{5} + \frac{4}{5})$

Retour

Stratégie en utilisant des probabilités.

Soit un jeu n joueurs tel que chaque joueur i possède

- un ensemble d'actions S_i
- une utilité $u_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{N}$

Une stratégie mixte (NE) est une mesure de probabilité p_i définie sur l'ensemble des actions de i.

$$\forall i, \sum_{s \in S_i} p_i(s) = 1$$

Un profil p est un vecteur de n éléments $(p_1, \ldots, p_n)$ tel que i joue la stratégie mixte p_i.

Equilibre de Nash mixte

Soit un jeu n joueurs tel que chaque joueur i possède

- un ensemble d'actions S_i
- une utilité $u_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{N}$

Une utilité U_i de i avec p le profil du jeu est

$$U_i(p) = Eu_i(p)$$

Un équilibre de Nash mixte est un profil $p^* = (p_1^*, \cdots, p_n^*)$ tel que

$$\forall i,\ \forall p_i' \in \mathcal{P}_i \text{ on a } U_i(p_i^*, p_{-i}^*) \geq U_i(p_i', p_{-i}^*).$$

$\mathcal{P}_i$ l'ensemble des stratégies mixtes de i.

◂ retour sur l'exemple

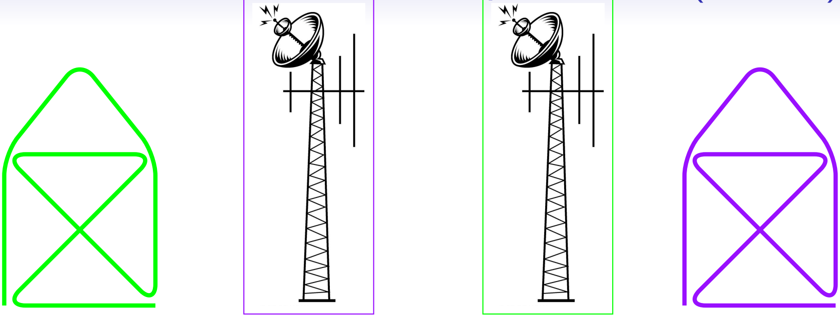
Théorème [Nash51]

Il existe un équilibre de Nash mixte dans tout jeu fini.

Rappel : tous les jeux ne possèdent pas d'équilibre de Nash pur.

3. Les jeux "classiques"

Dilemme des prisonniers ($c > 0$)



J1 \ J2	transmettre	$\overline{\text{transmettre}}$
transmettre	(1-c , 1-c)	(-c , 1)
$\overline{\text{transmettre}}$	(1 , -c)	(0 , 0)

Domination au sens de Pareto

		J 2	
		transmettre	$\overline{\text{transmettre}}$
J 1	transmettre	(1-c , 1-c)	(-c , 1)
	$\overline{\text{transmettre}}$	(1 , -c)	(0 , 0)

Remarque :

(transmettre,transmettre) est $\oplus$ favorable que ($\overline{\text{transmettre}}$,$\overline{\text{transmettre}}$).

Définition : Le profil $\hat{s}$ pareto-domine le profil s si

1. $\forall i, u_i(\hat{s}) \geq u_i(s)$,
2. $\exists j, u_j(\hat{s}) > u_j(s)$,

Notion de coopération

Remarque :

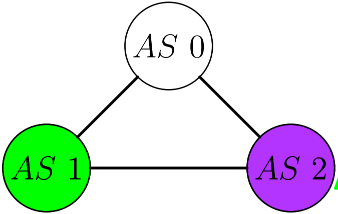
(transmettre,transmettre) est $\oplus$ favorable que ($\overline{\text{transmettre}}$,$\overline{\text{transmettre}}$).

Définition : Le profil $\hat{s}$ pareto-domine le profil s si

1. $\forall i, u_i(\hat{s}) \geq u_i(s)$,
2. $\exists j, u_j(\hat{s}) > u_j(s)$,

Pennies matching

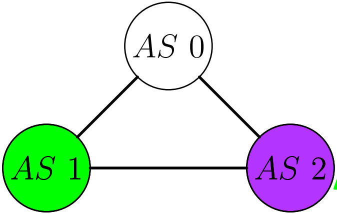
- **AS 1** $\left\{ \begin{array}{l} \text{veut atteindre } \textbf{AS 0} \text{ en préférant la route } 120 \\ \text{rentabilise la route } 10 \text{ si } \textbf{AS 2} \text{ choisit } 210 . \end{array} \right.$
- **AS 2** veut nuire à **AS 1**



AS 2

AS 1	210	20
120	(-1 , 1)	(1 , -1)
10	(1 , -1)	(-1 , 1)

- **AS 1** $\left\{\begin{array}{l}\text{veut atteindre } \textbf{AS 0} \text{ en préférant la route } 120 \\ \text{rentabilise la route } 10 \text{ si } \textbf{AS 2} \text{ choisit } 210 \text{ .}\end{array}\right.$
- **AS 2** veut nuire à **AS 1**

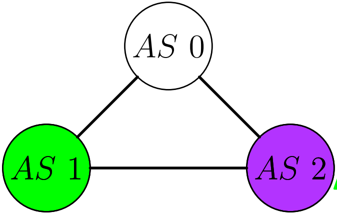


		AS 2	
		210	20
AS 1	120	(-1 , 1)	(1 , -1)
	10	(1 , -1)	(-1 , 1)

Aucun équilibre de Nash pur.

Pennies matching

- **AS 1** $\left\{ \begin{array}{l} \text{veut atteindre } \textbf{AS 0} \text{ en préférant la route 120} \\ \text{rentabilise la route 10 si } \textbf{AS 2} \text{ choisit 210 .} \end{array} \right.$
- **AS 2** veut nuire à **AS 1**



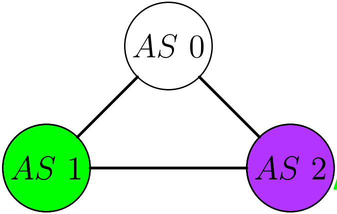
AS 1	**AS 2**: 210	**AS 2**: 20
120	(-1 , 1)	(1 , -1)
10	(1 , -1)	(-1 , 1)

Aucun équilibre de Nash pur.

Un Équilibre mixte $((\frac{1}{2} : 10, \frac{1}{2} : 120), (\frac{1}{2} : 20, \frac{1}{2} : 210))$

Pennies matching

- **AS 1** $\left\{\begin{array}{l}\text{veut atteindre } \textbf{AS 0} \text{ en préférant la route } 120 \\ \text{rentabilise la route } 10 \text{ si } \textbf{AS 2} \text{ choisit } 210\text{ .}\end{array}\right.$
- **AS 2** veut nuire à **AS 1**



		AS 2	
		210	20
AS 1	120	(-1 , 1)	(1 , -1)
	10	(1 , -1)	(-1 , 1)

Aucun équilibre de Nash pur.

Un Équilibre mixte $((\frac{1}{2} : 10, \frac{1}{2} : 120), (\frac{1}{2} : 20, \frac{1}{2} : 210))$

Aucune coopération possible

Questions ?.

Timothy G. Griffin, F. Bruce Shepherd, Gordon Wilfong
The Stable Paths Problem and Interdomain Routing.
IEEE/ACM Transactions on Networking 2002.

Levente Buttyan, Jean-Pierre Hubaux Shepherd
Security and Cooperation in Wireless Networks
Cambridge University Press 2007.

J. Cohen, Anurag Dasgupta, Sukumar Ghosh, Sébastien Tixeuil
An exercise in selfish stabilization.
ACM Transactions on Autonomous and Adaptive Systems 2008.

Noam Nisan, Tim Roughgarden, Eva Tardos, Vijay V. Vazirani uil
Algorithmic Game Theory
Cambridge University Press 2008.