

Introduction à la théorie des jeux.

Johanne Cohen
Johanne.Cohen@loria.fr

Introduction à la théorie des jeux. – p.

Plan: Introduction à la théorie des jeux.

1. Introduction à la théorie des jeux.
 - (a) Jeu *Opéra, Foot, ou Documentaire*
 - (b) Jeu dilemme des prisonniers
 - (c) Equilibre de Nash pur ou mixte.
2. Introduction à la théorie des jeux **répétés**.

Introduction à la théorie des jeux. – p.

1) Introduction à la théorie des jeux

Introduction à la théorie des jeux. – p.

Opéra, Foot, ou Documentaire?

- Deux joueurs **Bob**, et **Alice** veulent passer la soirée ensemble devant la télévision: 3 choix s'imposent
 1. regarder un documentaire D.
 2. regarder un opéra O,
 3. regarder un match de foot F
 - Ils ont des préférences: dans l'ordre des préférences,
 1. foot F, opéra O, documentaire D pour **Bob**
 2. opéra O, foot F, documentaire D pour **Alice**
- les préférences modélisées par une fonction d'utilité U .

Introduction à la théorie des jeux. – p.

Opéra, Foot, ou Documentaire?

- L'ordre des préférences,
 1. pour **Bob**: foot F, opéra O, documentaire D.
 2. pour **Alice**: opéra O, foot F, documentaire D.
- Si **Alice** a le choix entre opéra O, foot F:
Alors elle choisira opéra O

Alice a un comportement rationnel.
- **comportement rationnel d'un joueur**: choisir la stratégie qui lui est le plus favorable parmi un ensemble de stratégies.

Introduction à la théorie des jeux. – p.

Modélisation du jeu.

Questions à se poser:

1. Qui joue ?

Pour chaque joueur:

2. Quelles actions/stratégies ?
3. Quel gain en fct du *profil des stratégies*?

Introduction à la théorie des jeux. – p.

Réponse aux questions

1. Qui joue ? **Alice** et **Bob**
2. Quelles actions/stratégies ? opéra $\mathcal{O}$, foot F, doc D.
3. Quel gain en fct du *profil des stratégies*? fct d'utilité (quantifier la relation de préférence).

		Bob		
		$\mathcal{O}$	F	D
Alice	$\mathcal{O}$	(2, 1)	(0, 0)	(0, -1)
	F	(0, 0)	(1, 2)	(0, -1)
	D	(0, 0)	(0, 0)	(1, -1)

Introduction à la théorie des jeux. – p. 1

Réponse aux questions

		Bob		
		$\mathcal{O}$	F	D
Alice	$\mathcal{O}$	(2, 1)	(0, 0)	(0, -1)
	F	(0, 0)	(1, 2)	(0, -1)
	D	(0, 0)	(0, 0)	(1, -1)

- Quelque soit la stratégie de **Alice**, **Bob** préfère la stratégie D que la stratégie F
- la stratégie D est **dominée** par la stratégie F.

Introduction à la théorie des jeux. – p. 1

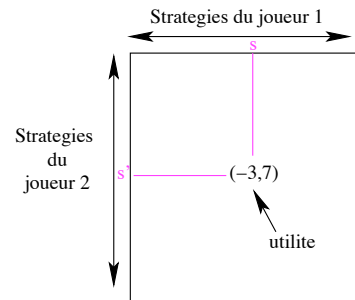
Réponse aux questions

		Bob	
		$\mathcal{O}$	F
Alice	$\mathcal{O}$	(2, 1)	(0, 0)
	F	(0, 0)	(1, 2)
	D	(0, 0)	(0, 0)

- Comme pour **Bob**, la stratégie D est **dominée** par la stratégie F. Alors suppression de la stratégie de D pour **Bob**.

Introduction à la théorie des jeux. – p. 1

Visualisation du jeu: forme stratégique.



Remarque: Généralisation à plusieurs joueurs

Introduction à la théorie des jeux. – p. 1

Le jeux avec $n \leq 2$ joueurs

Est

- un ensemble d'actions S_i pour chaque joueur,
- une utilité u_i pour chaque joueur: une fonction $S_1 \cdots S_n \rightarrow \mathbb{R}$

Remarque:

- s est un état (ensemble de stratégies) si $s \in S_1 \cdots S_n$
- s^{-i} ensemble de stratégies de tous les joueurs sauf le joueur i
- $(s, s^{-i}) = (s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$, $(s', s^{-i}) = (s'_1, \dots, s'_i, \dots, s_n)$

Introduction à la théorie des jeux. – p. 1

Retour au jeu "Opéra ou foot?"

		Bob	
		$\mathcal{O}$	F
Alice	$\mathcal{O}$	(2, 1)	(0, 0)
	F	(0, 0)	(1, 2)

Si **Alice** décide de jouer la stratégie $\mathcal{O}$.

- Elle risque de passer la soirée seule:-)
- Et dans cette situation, **Bob** préfère l'opéra ($\mathcal{O}$)

Si **Alice** décide de jouer la stratégie F.

- Elle risque de passer la soirée seule:-)
- Et dans cette situation, **Bob** préfère le foot (F)

Introduction à la théorie des jeux. – p. 1

Retour au jeu “Opéra ou foot?”

		Bob	
		O	F
Alice	O	(2, 1)	(0, 0)
	F	(0, 0)	(1, 2)

- deux états intéressants: (O, O) ou (F, F)

Aucun joueur a intérêt à changer sa stratégie.
⇒ Equilibre de Nash

- Mais lequel choisir ? imprévisible.

Equilibre de Nash

Soit un jeu tel que

- un ensemble d'actions S_i pour chaque joueur,
- pour chaque joueur une utilité $u_i: S_1 \cdots S_n \rightarrow \mathbb{R}$

Un **équilibre de Nash** (NE) est un état $s = (s_1, \dots, s_n)$ tel que

$$\forall i, \forall s'_i \text{ on a } u_i(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n) \geq u_i(s_1, \dots, s'_i, \dots, s_n).$$

Jeu “Ciseaux/Papier/Caillou”.

Modalité: 2 joueurs doivent choisir entre Ciseaux/Papier/Caillou.

Forme stratégique:

	Ciseaux	Papier	Caillou
Ciseaux	(1, 1)	(0, 2)	(2, 0)
Papier	(2, 0)	(1, 1)	(0, 2)
Caillou	(0, 2)	(2, 0)	(1, 1)

- Ce jeu ne possède pas d'équilibre de Nash pur.
- Mais il possède un équilibre de Nash mixte.
($\forall i \in \{1, 2\} \ p_i(\text{Ciseaux}) = p_i(\text{Papier}) = p_i(\text{Caillou}) = \frac{1}{3}$)

Stratégie en utilisant des probabilités.

Soit un jeu tel que

- un ensemble d'actions S_i pour chaque joueur,
- pour chaque joueur une utilité $u_i: S_1 \cdots S_n \rightarrow \mathbb{R}$

Une **stratégie mixte** (NE) est une mesure de probabilité p_i définie sur l'ensemble des stratégies pures du joueur i . (P_i ens. des stratégies mixte du joueur i).

Une **utilité** U d'une stratégie mixte **mixte** p_i

$$U_i(p) = Eu_i(p)$$

Jeu “Opéra ou foot?”

- Deux stratégies : $p_{\text{Alice}} = (q, 1 - q)$ et $p_{\text{Bob}} = (t, 1 - t)$

		Bob	
		O	F
Pour Alice:	O	q (2, 1)	$1 - t$ (0, 0)
	F	$1 - q$ (0, 0)	(1, 2)

- $O: U_{\text{Alice}}(p_{\text{Alice}}, p_{\text{Bob}}) = Eu_1(p_{\text{Alice}}, p_{\text{Bob}}) = 2t + 0(1 - t) = 2t$
- $F: U_{\text{Alice}}(p_{\text{Alice}}, p_{\text{Bob}}) = Eu_1(p_{\text{Alice}}, p_{\text{Bob}}) = 0t + 1(1 - t) = 1 - t$
- Face à la stratégie mixte de Bob, Alice choisira O si $2t > 1 - t$ donc si $t > 1/3$

Jeu “Opéra ou foot?”

		Bob	
		O	F
Alice	O	t (2, 1)	$1 - t$ (0, 0)
	F	$1 - q$ (0, 0)	(1, 2)

Face à la stratégie mixte de Bob,

- Alice choisira toujours O ($q = 1$) si Bob va à l'opéra au plus une soirée sur trois $t > 1/3$
- Alice choisira toujours F ($q = 0$) si Bob va au plus au Foot l'opéra 2 soirées sur trois $1 - t > 2/3$.
- Si $t = 1/3$, choix indifférent pour Alice.

Jeu "Opéra ou foot?"

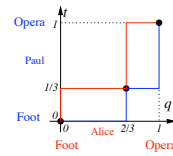
- Deux stratégies : $p_{Alice} = (q, 1 - q)$ et $p_{Bob} = (t, 1 - t)$

		Bob	
		O	F
Alice	O	q (2, 1)	$1 - q$ (0, 0)
	F	$1 - q$ (0, 0)	$1 - t$ (1, 2)

Pour Bob:

- O: $U_{Bob}(p_{Alice}, p_{Bob}) = 1q + 0(1 - q) = q$
- F: $U_{Bob}(p_{Alice}, p_{Bob}) = 0q + 2(1 - q) = 2 - 2q$
- Bob choisira O si $q > 2 - 2q$ donc si $q > 2/3$

Equilibre de Nash.



- Courbe délimitant des préférences.
- trois points d'intersections.
- Un équilibre de Nash mixte : $(2/3, 1/3)$
 - 2 soirées sur 3 Alice va à l'opéra.
 - 1 soirée sur 3 Bob va à l'opéra.

GAIN ESPÉRÉ POUR LES DEUX = $2/3$

Equilibre de Nash mixte

Soit un jeu tel que

- un ensemble d'actions S_i pour chaque joueur,
- pour chaque joueur une utilité $u_i: S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}$

Une **stratégie mixte** (NE) est une mesure de probabilité p_i définie sur l'ensemble des stratégies pures du joueur i . (P_i ens. des stratégies mixte du joueur i).

$$\forall i, \sum_{s \in S_i} p_i(s) = 1$$

Un **équilibre de Nash mixte** (NE) est un état $p^* = (p_1^*, \dots, p_n^*)$ tel que

$$\forall i, \forall p'_i \in P_i \text{ on a } u_i(p_i^*, p_{-i}^*) \geq u_i(p'_i, p_{-i}^*).$$

Théorème de Nash

Theoreme [Nash51]: Il existe un équilibre de Nash mixte dans tout jeu fini.

Le dilemme du prisonnier: énoncé

Deux criminels **Bob**, et **Alice** ayant commis ensemble un crime sont arrêtés. Ils sont interrogés séparément: Ils ont deux stratégies Avouer (A), ou ne pas avouer (N). L'offre de la police est la suivante:

- Si un **seul** dénonce, alors il est relâché et l'autre est condamné à 10 ans de prison.
- Si **aucun des deux** n'avoue, alors condamnation de 1 an
- si **vous avouez tous les 2**, alors condamnation de 8 ans

Forme stratégique

- 2 stratégies: Avouer (A), ou, ne pas avouer (N).
- chiffre correspond au perte d'année de "liberté".

		Bob	
		A	N
Alice	A	(-8, -8)	(0, -10)
	N	(-10, 0)	(-1, -1)

Discussion (1/2)

		Bob	
		A	N
Alice	A	$(-8, -8)$	$(0, -10)$
	N	$(-10, 0)$	$(-1, -1)$

Si Alice décide de jouer la stratégie N.

- Elle risque 10 ans de prison.
- Et dans cette situation, Bob a intérêt d'avouer (A)

Si Alice décide de jouer la stratégie A.

- au pire des cas elle risque que 8 ans de prison.
- Et dans cette situation, Bob a intérêt d'avouer (A)

Discussion (2/2)

		Bob	
		A	N
Alice	A	$(-8, -8)$	$(0, -10)$
	N	$(-10, 0)$	$(-1, -1)$

Etude l'état (N, N).

le $\oplus$ favorable si les 2 joueurs sont en coopération.

Etude du l'état (A, A).

le $\oplus$ favorable si les 2 joueurs ne sont pas en coopération: équilibre de Nash.

Domination au sens de Pareto

- Le profil $\hat{s}$ pareto-domine le profil s si
 - $\forall i, u_i(\hat{s}) \geq u_i(s)$,
 - $\exists j, u_j(\hat{s}) > u_j(s)$,
- l'état (A, A) est un équilibre de Nash
- l'état (N, N) pareto-domine l'état (A, A).
 - Alice: $u_{Alice}(N, N) = -1 \geq u_{Alice}(A, A) = -8$
 - Bob: $u_{Bob}(N, N) = -1 > u_{Bob}(A, A) = -8$
- Dans le jeu "Opéra" et "Foot", les états (O, O) et (F, F) ne sont pas pareto-comparable.

Résumé: dans le jeu des prisonniers

- Exécution du jeu en 1 seule étape: jeu non-coopératif
Choix des joueurs : (A, A).
- Et si le jeu est répété plusieurs fois (1000, 1000000)?
Peut-être aura-t-il une confiance mutuelle entre les joueurs?

2) Introduction à la théorie des jeux RÉPÉTÉS

Jeux répétés : principe

La situation de coopération devenir stable
Si

- le jeu est répété
- chaque joueur pense que

la fin de coopération supprimera toute possibilité d'une nouvelle coopération par la suite.

Donc une notion de punition contre les stratégies indésirables.

Gain des joueurs dans ce jeu répété.

Intuitivement, le gain d'un joueur i = la moyenne des gains pour chaque période, i.e: si le gain est la suite $\{u_i(1), u_i(2), u_i(3), \dots\}$

$$\text{fct de gain pour l'ens. du jeu} = \lim_{t \rightarrow \infty} (1/t) \sum_{j=0}^t u_i(j)$$

Mais, comment le joueur peut-il évaluer la conséquence du choix à la période t ?

- Préférence entre le gain présent ou le gain futur.
- facteur de réactualisation $\delta \in [0, \dots, 1]$:

$$\delta \equiv \frac{\text{gain présent}}{\text{gain futur}}$$

Gain des joueurs dans ce jeu répété.

Pour le joueur i ,

- son gain est la suite $\{u_i(1), u_i(2), u_i(3), \dots\}$
- son facteur de réactualisation = δ avec $\delta \in [0, \dots, 1]$:

Evaluation de son gain en fonction du futur:

- valeur actualisée de ses gains sur la totalité du jeu:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \times u_i(t)$$

- la moyenne des gains pour chaque période,

$$(1 - \delta) \times \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \times u_i(t)$$

facteur de réactualisation

Notion avec le futur

- $\delta \equiv \frac{\text{gain présent}}{\text{gain futur}}$

$$\text{la moyenne des gains} = (1 - \delta) \times \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \times u_i(t)$$

- la probabilité $(1 - p)$ que le jeu finisse après cette période:

$$\text{l'espérance des gains} \equiv \sum_{t=1}^{\infty} p^{t-1} \times u_i(t)$$

Retour au dilemme du prisonnier

		Prisonnier 2	
		A	N
Prisonnier 1	A	(0, 0)	(4, -1)
	N	(-1, 4)	(3, 3)

Stratégie du joueur 1:

- 1 joue N tant que 2 joue N
- Si il y a déviation de 2, alors 1 joue toujours A

Analyse

- la valeur actualisée/espérée de ce flux: $\sum_{t=0}^{\infty} 3\delta^t = \frac{3}{1-\delta}$
- S'il dévie (jouer A) alors gain présent = 4 et gain futur = 0

$$\frac{3}{1-\delta} \geq 4 \text{ implique } \delta \geq 1/4$$

Donc

équilibre de Nash si $\delta \geq 1/4$

Multiplicité des équilibres

Stratégie du joueur 1:

- 1 alterne entre N et A tant que 2 joue N
- Si il y a déviation de 2, alors 1 joue toujours A

Analyse pour le joueur 2.

- alternance des gains: 4 ou 0
- la valeur actualisée/espérée de ce flux: $\sum_{t=0}^{\infty} 4\delta^{2t} = \frac{4}{1-\delta^2}$
- S'il dévie (jouer A) alors gain = 4 et gain futur = 0

$$\frac{4}{1-\delta^2} \geq 4 \text{ implique } 1 \geq 1 - \delta^2 \text{ implique } \delta^2 \geq 0$$

Multiplicité des équilibres

Stratégie du joueur 1 :

- 1 alterne entre N et A tant que 2 joue N
- Si il y a déviation de 2, alors 1 joue toujours A

Analyse pour le joueur 1.

- alternance des gains: 3 ou -1
- la valeur actualisée/espérée de ce flux:

$$\sum_{t=0}^{\infty} 3\delta^{2t} - 1\delta^{2t+1} = \frac{3-\delta}{1-\delta^2}$$
- S'il dévie alors gain présent = 3 et gain futur = 0

$$\frac{3-\delta}{1-\delta^2} \geq 3 \rightarrow 3 - \delta \geq 3(1 - \delta^2) \rightarrow 1/3 \leq \delta$$

Retour au dilemme du prisonnier

		Prisonnier 2	
		A	N
Prisonnier 1	A	(0, -3)	(6, -1)
	N	(-1, 2)	(5, 5)

- Menace du joueur 2 : forcer que le gain de 1 soit égal à 0
- Menace non crédible car si elle la met en exécution, alors à chaque période, gain = -2