Routage, Allocations de ressources et équilibres.

Johanne Cohen

Johanne.Cohen@loria.fr

CNRS, Laboratoire LORIA, Nancy.

jeu *“Ciseaux/papier/caillou”*.

Modalité: 2 joueurs doivent choisir entre *Ciseaux/papier/caillou*.

Forme stratégique:

	Ciseaux	Papier	Caillou
Ciseaux	$(1,1)$	$(0,2)$	$(2,0)$
Papier	$(2,0)$	$(1,1)$	$(0,2)$
Caillou	$(0,2)$	$(2,0)$	$(1,1)$

- Ce jeu ne possède pas d’équilibre de Nash pure.
- Mais il possède un équilibre de Nash mixte.
  ($\forall i \in \{1,2\}\ p_i(Ciseaux) = p_i(Papier) = p_i(Caillou) = \frac{1}{3}$)

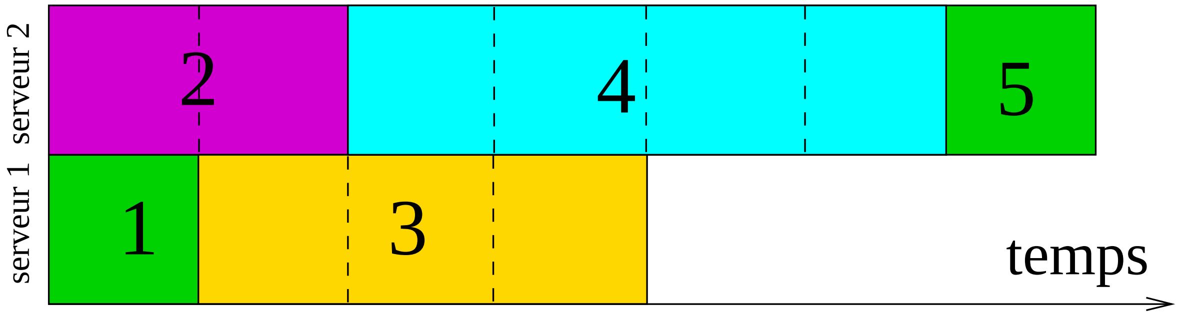
Plan

1. Définitions des jeux d'allocations + des jeux de congestions.
2. Existence et compléxité des équilibres de Nash.
3. Prix de l'anarchie.

Problème d'allocation de tâches.

Instance :
- m machines (serveurs),
- n tâches ayant pour tps d'exécution $\{w_1, \ldots, w_n\}$
- un ens. de choix S_j pour chaque tâche j.

Configuration: allocation des tâches sur les serveurs.



Charge L_i d'un serveur i: somme des tps d'exécution des tâches sur le serveur.

Problème d'allocation de tâches.

Un joueur i = la tâche i.

Stratégies pures: choix des serveurs

Objectif de chaque joueur:

minimiser la charge du serveur l'hébergeant.

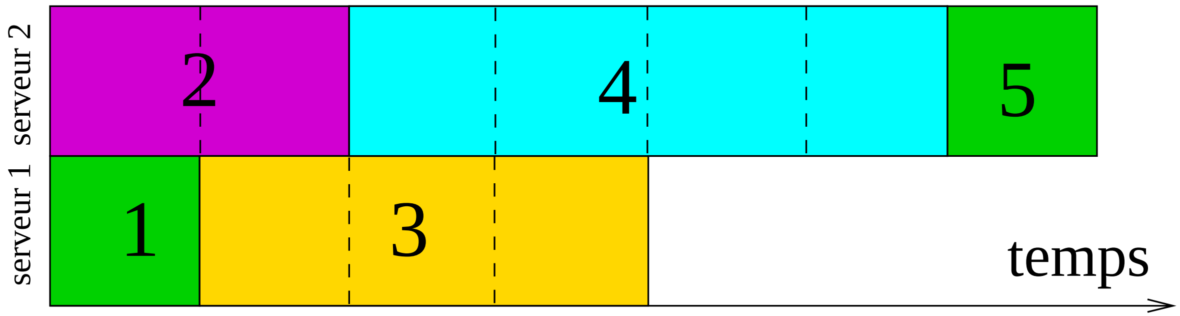
Equilibre de Nash pure:

Configuration où aucun joueur j n'a intérêt de modifier son placement i : $\forall k \in [1, \ldots, m], L_i \leq L_k + w_j$.

Exemple: allocation de tâche

2 serveurs, 5 tâches,

Une affectation:



$L_1 = 4$, $L_2 = 7$

Une tâche peut-elle améliorer son utilité?

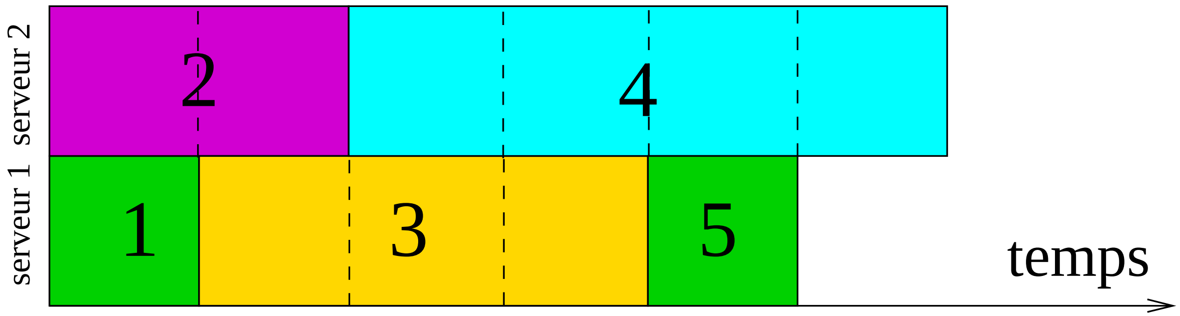
tâche	utilité
1	4
3	4

tâche	utilité
2	7
4	7
5	7

Exemple: allocation de tâche

2 serveurs, 5 tâches,

Déplacement de 5:



$L_1 = 5$, $L_2 = 6$

Une tâche peut-elle améliorer son utilité?

tâche	utilité
1	5
3	5
5	5

tâche	utilité
2	6
4	6

Problèmatique du routage (atomique)

Instance : $G = (V, E)$ un graphe orienté,

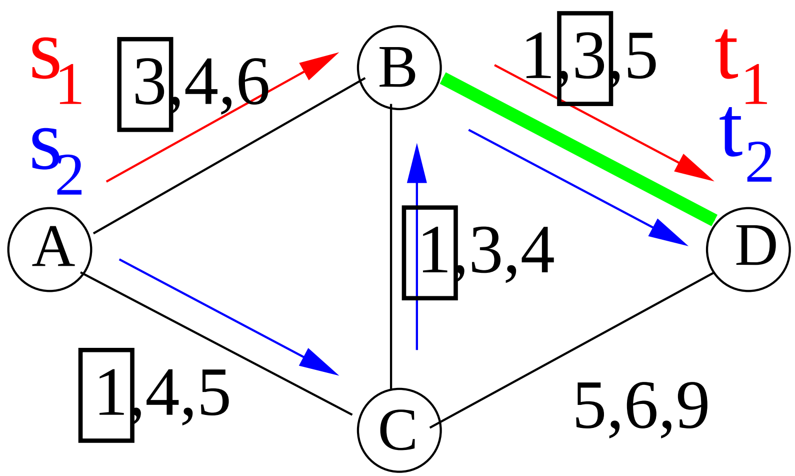
k couples $(s_i, t_i) \in V^2$, pour $i \in [1, \ldots, k]$

$d_e(x)$= coût de l'arête e si x chemins la traversent.

Objectif: Trouver k chemins P_i reliant s_i à t_i sachant le coût d'un chemin P est $\sum_{e \in P} d_e(f(e))$ avec $f(e)$ est le nombre de chemins passant par e.

$c(P_1) = 3 + 3 = 6$

$c(P_2) = 1 + 1 + 3 = 5$



Jeu de congestion réseau

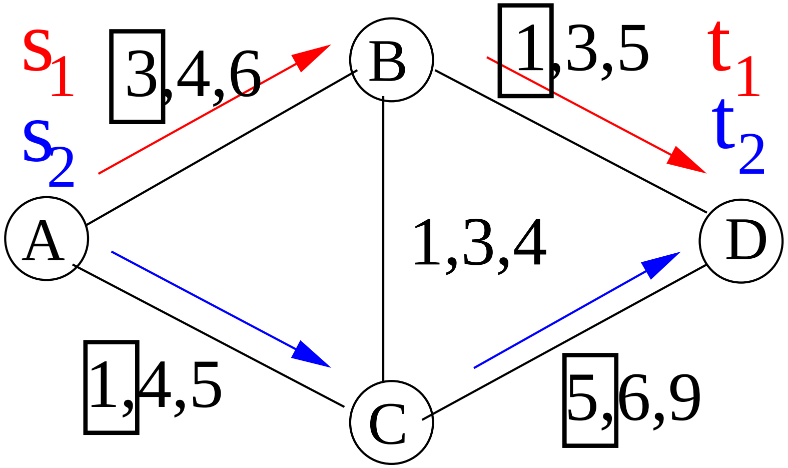
Jeu de congestion:

- Ensemble fini E de ressources,
- Fct non-décroissante d de coût: $d : E \times 1, \ldots, n \to Z$,
- ensemble de stratégies S_i (sous-ensemble de E),
- coût d'un joueur: $\sum_{e \in S_i} d_e(f_e(e))$.

Jeu de congestion réseau: (lié à problèmatique du routage)

- joueur correspond à (s_i, t_i).
- Stratégies pures: chemins entre s_i et t_i.
- Objectif du joueur i: minimiser le coût de son chemin.

Exemple de jeux de congestions.

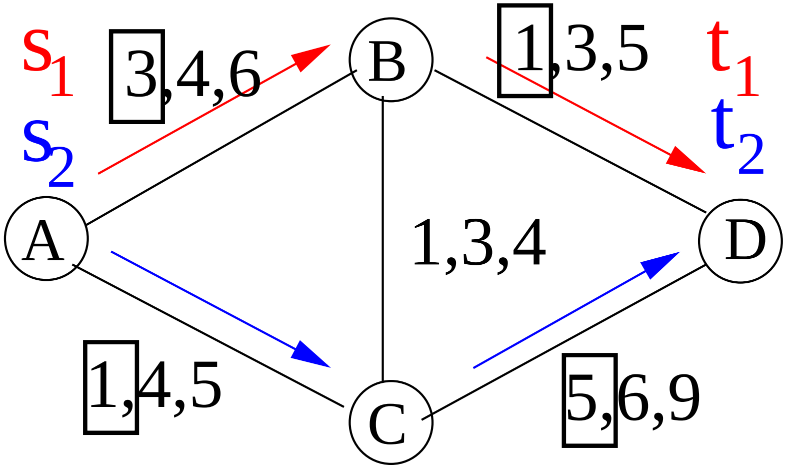


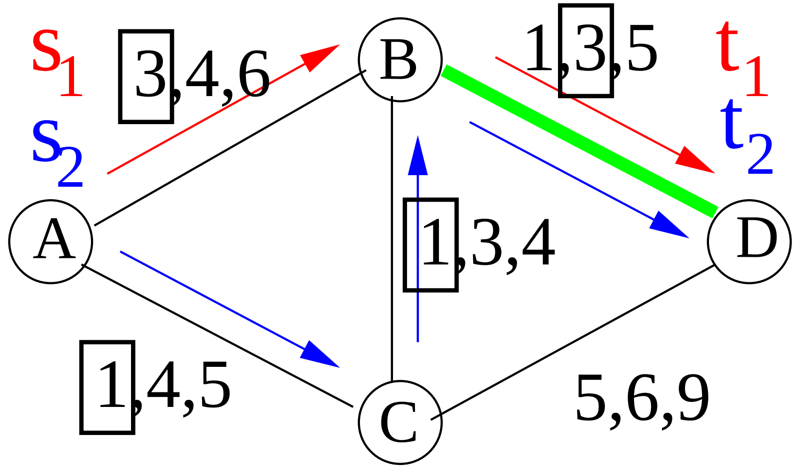
$c(P_1) = 3 + 1$

$c(P_2) = 1 + 5 = 10$

N'est pas équilibre de Nash

Exemple de jeux de congestions.





$$c(P_1) = 3 + 1$$

$$c(P_2) = 1 + 5 = 10$$

N’est pas équilibre de Nash

$$c(P_1) = 3 + 3$$

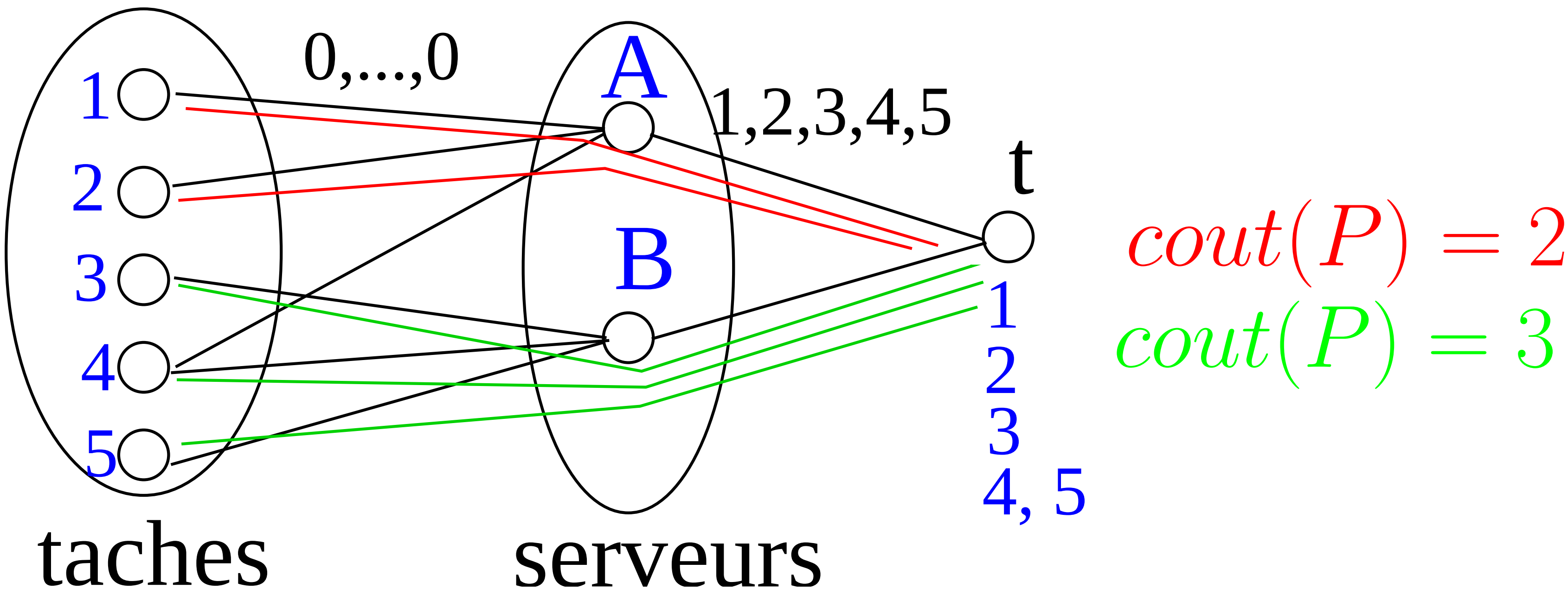
$$c(P_2) = 1 + 1 + 3 = 5$$

Est équilibre de Nash

Remarque

Equivalence entre le jeu d'allocation de tâches unitaires et un cas particulier du jeu de congestion réseau.

- G= graphe biparti + 1 sommet t
- Chemins entre (j, t) avec j = allocation de la tâche j.



2. Existence d'un Equilibre de Nash

Théorème : *Les jeux d'allocation a au moins un équilibre de Nash pure.*

Théorème [Rosenthal73]:

Les jeux de congestion a au moins un équilibre de Nash pure.

Preuve utilisant les jeux de potentiel.

Un jeu de potentiel est un jeu s'il existe une fct de potentiel Φ sur un ens. des configurations telle que:

> Si le joueur i change de stratégie de s vers s' alors, Φ est modifiée de la même façon que l'utilité de i.
>
> $$\Phi(s', s^{-i}) - \Phi(s, s^{-i}) = u_i(s', s^{-i}) - u_i(s, s^{-i})$$

Notation: $(s, s^{-i}) = (s_1, \ldots, s, \ldots, s_n)$, $(s', s^{-i}) = (s_1, \ldots, s', \ldots, s_n)$

Détermination de la fct de potentiel.

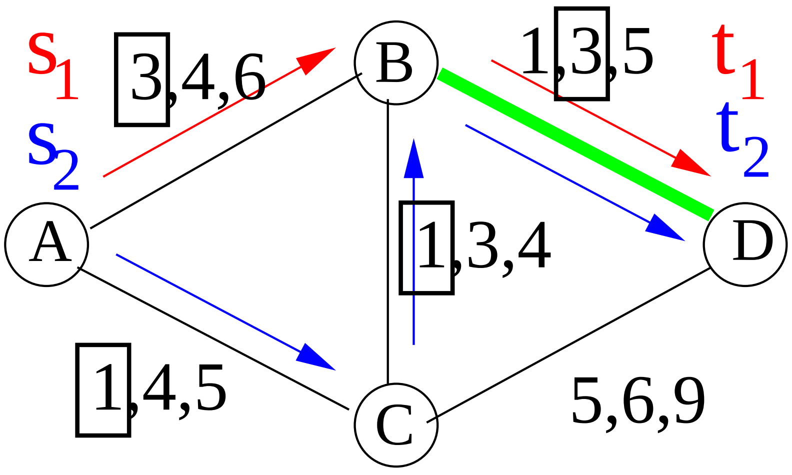
Dans les jeux de congestion réseau,

la fonction de potentiel: $\Phi(\mathcal{P}) = \sum_e \sum_{k=1}^{f(e)} d_e(k)$ avec $\mathcal{P}$ un ens. de chemins.

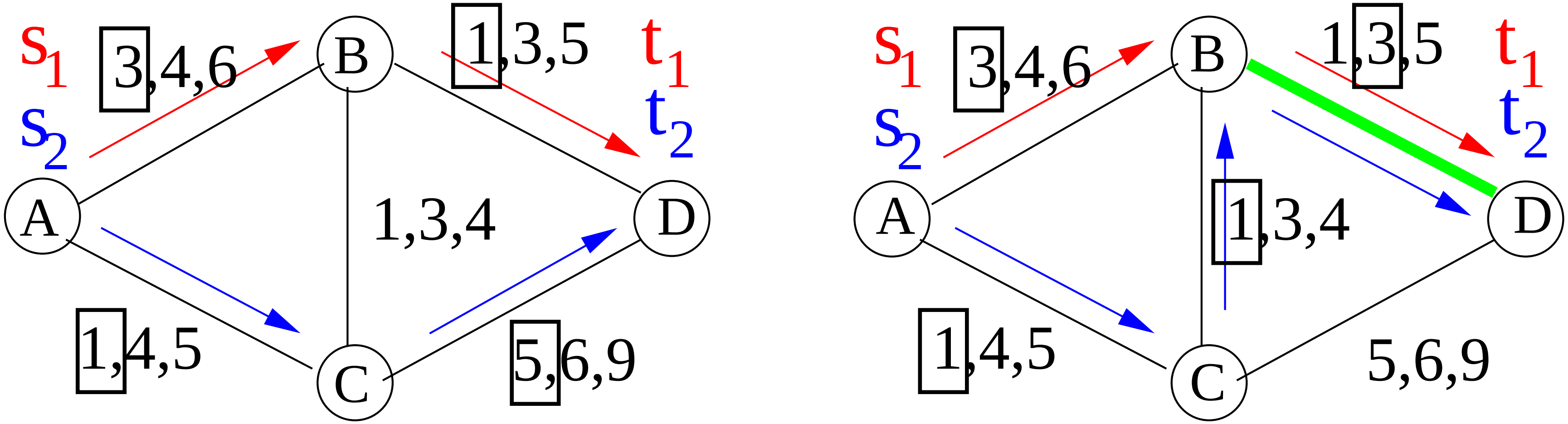
$$c(P_1) = 3 + 3 = 6$$

$$c(P_2) = 1 + 1 + 3 = 5$$

$$\phi(P_1, P_2) = 1 + 1 + 3 + 1 + 3$$



Changement d'états.



$c(P_1) = 3 + 1$

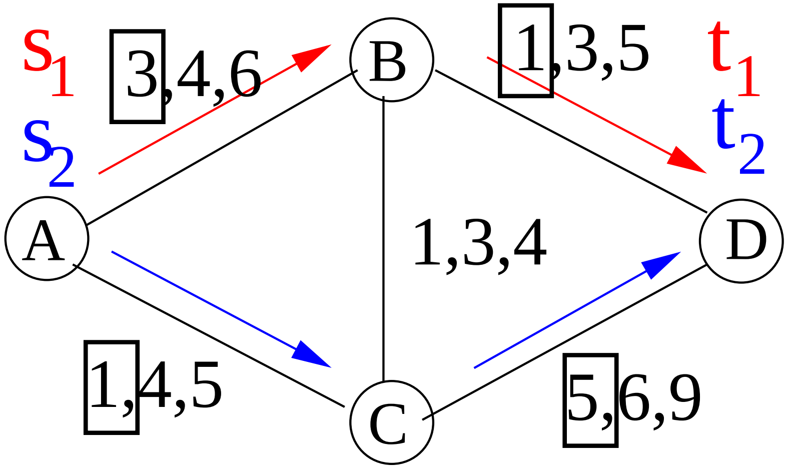
$c(P_2) = 1 + 5 = 6$

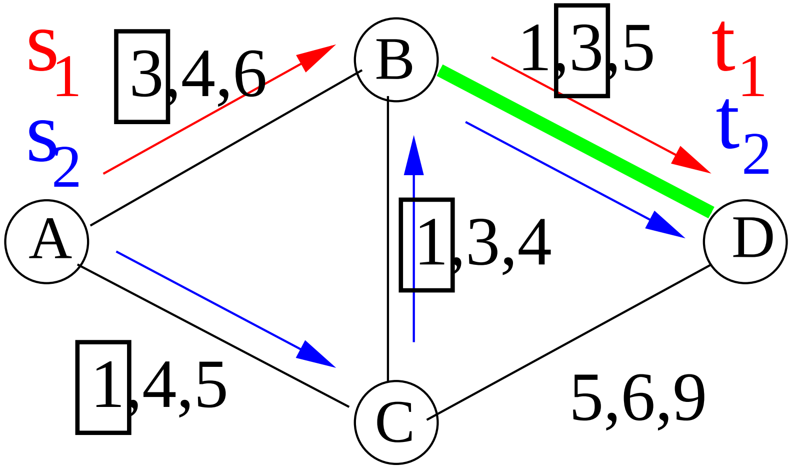
$\phi(P_1, P_2) = 10$

$c(P_1) = 3 + 3$

$c(P_2') = 1 + 1 + 3 = 5$

Changement d'états.





$c(P_1) = 3 + 1$

$c(P_2) = 1 + 5 = 6$

$\phi(P_1, P_2) = 10$

$c(P_1) = 3 + 3$

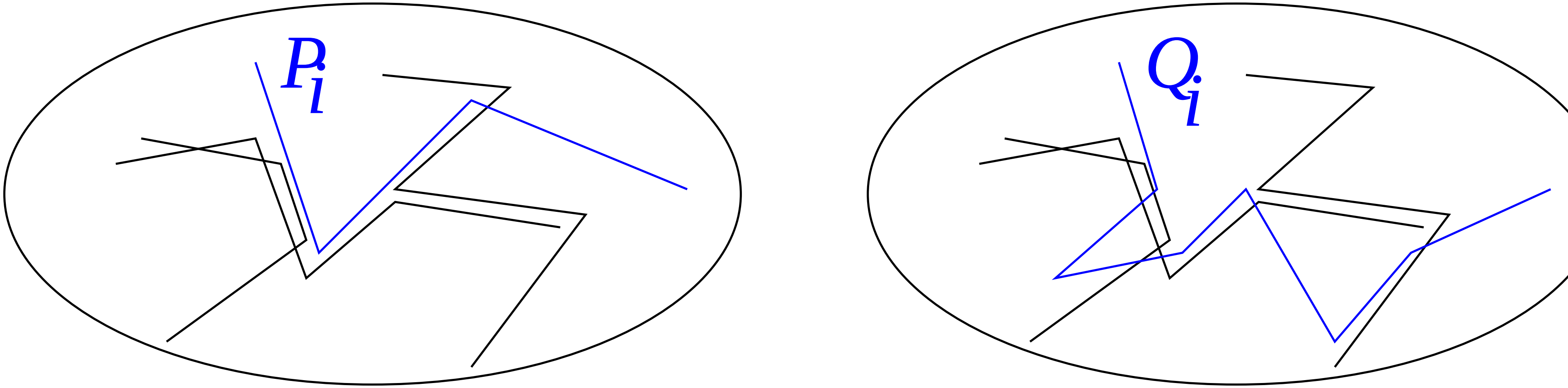
$c(P_2') = 1 + 1 + 3 = 5$

$\phi(P_1, P_2') = 5 + 1 + 3 = 9$

$$\phi(P_1, P_2) - \phi(P_1, P_2') = c(P_2) - c(P_2')$$

Changement d'états

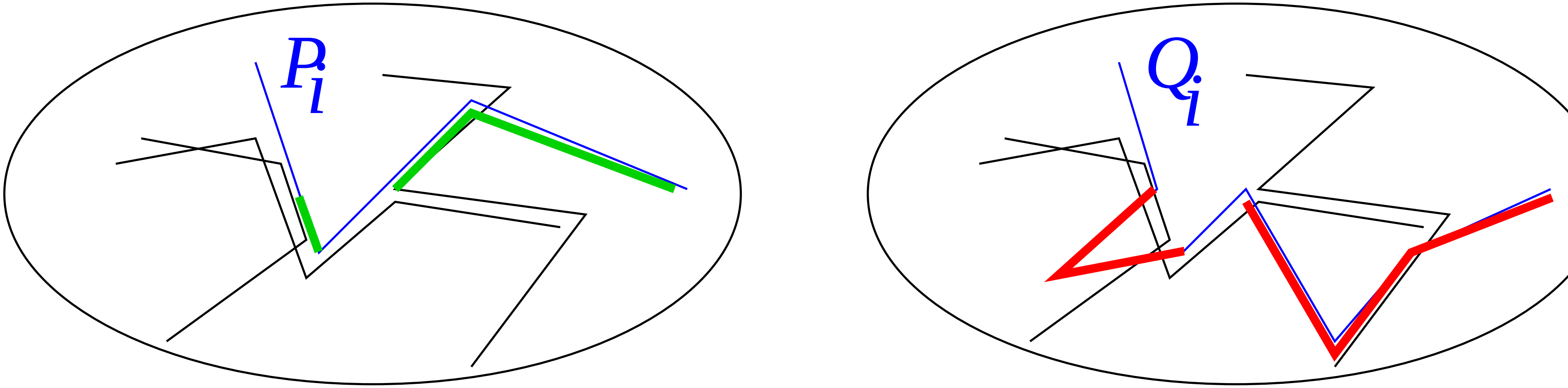
Si le joueur i change de stratégie P_i en Q_i,



Changement d'états

Si le joueur i change de stratégie P_i en Q_i,

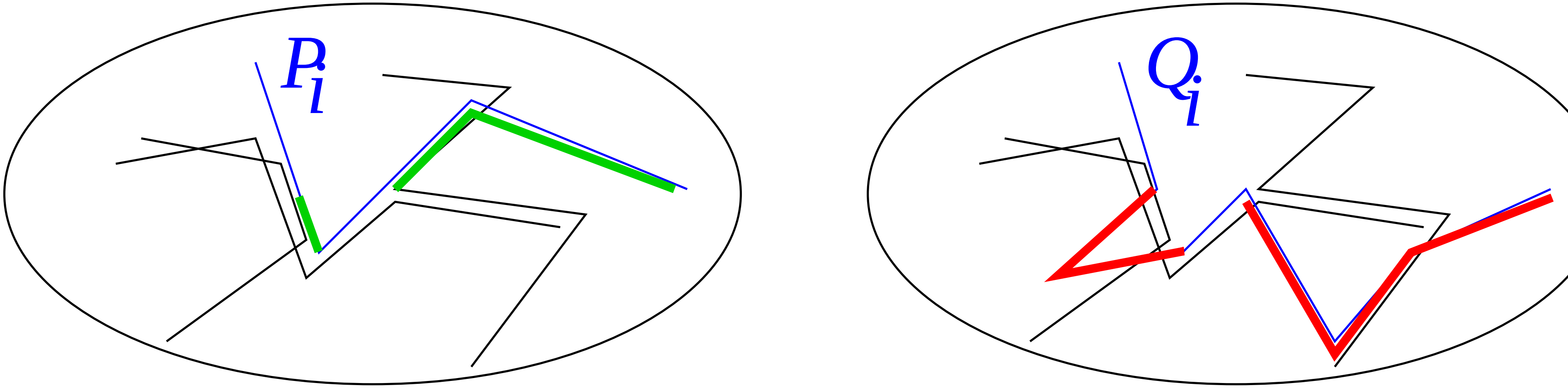
son gain = $c(P_i \backslash Q_i) - c(Q_i \backslash P_i)$



Changement d'états

Si le joueur i change de stratégie P_i en Q_i,

son gain = $\phi(P^{-i}P_i) - \phi(P^{-i}Q_i)$



Equilibre de Nash= $\forall i$, i ne veut pas changer de stratégie P_i en Q_i, car son gain <0 ($\phi(P^{-i}P_i) - \phi(P^{-i}Q_i) < 0$)

Conclusion: Minimum global de $\phi \approx$ équilibre de Nash.

Premiers résultats

Théorème [Rosenthal73]:

Les jeux de congestion a au moins un équilibre de Nash pure.

Conséquence: Un équilibre de Nash peut être calculé par un algorithme pseudo-polynomial dans les jeux de congestion.

Théorème [MontererShapley91]:

Les jeux de congestion sont équivalents aux jeux de potentiel.

Théorème [Fabrikant, Papadimitriou, Talwar2004]:

Calculer un équilibre dans les jeux de congestion réseau est PLS-complet

La classe PLS: *Polynomial Local Search.*

Problème Π dans PLS: problème d'optimisation Π [Johnson, Papadimitriou, Yannakakis88]

- ayant comme objectif le calcul de minimum locaux s

  (s est minimal sur le voisinage $\Gamma(s)$)
- avec Γ calculable en tps polynomial

PLS-Réduction de Π_1 vers Π_2 (dans PLS):

Trouver une transformation polynomiale d'une instance de Π_1 vers une de Π_2

telle que les optimaux locaux sont préservés.

La classe PLS (*Polynomial Local Search.*).

Problème NAE-SAT:

- Instance: ens. de clauses où chaque clause c_i est pondérée par w_i.
- Mesure: la somme des poids de toutes les clauses satisfiables par l'affectation s (telle que chaque clause n'a pas tous ses literals à la même valeur).
- Voisinage Γ de s: les affectations qui diffèrent de s d'une affectation d'une seule variable.

Théorème [Schaeffer,Yannakakis91]: *Le problème NAE-SAT est PLS-complet*

Jeu de congestion symétrique

Théorème [Fabrikant, Papadimitriou, Talwar2004]: *Dans les jeux de congestion réseau symétrique, un équilibre de Nash peut être trouvé en temps polynomial*

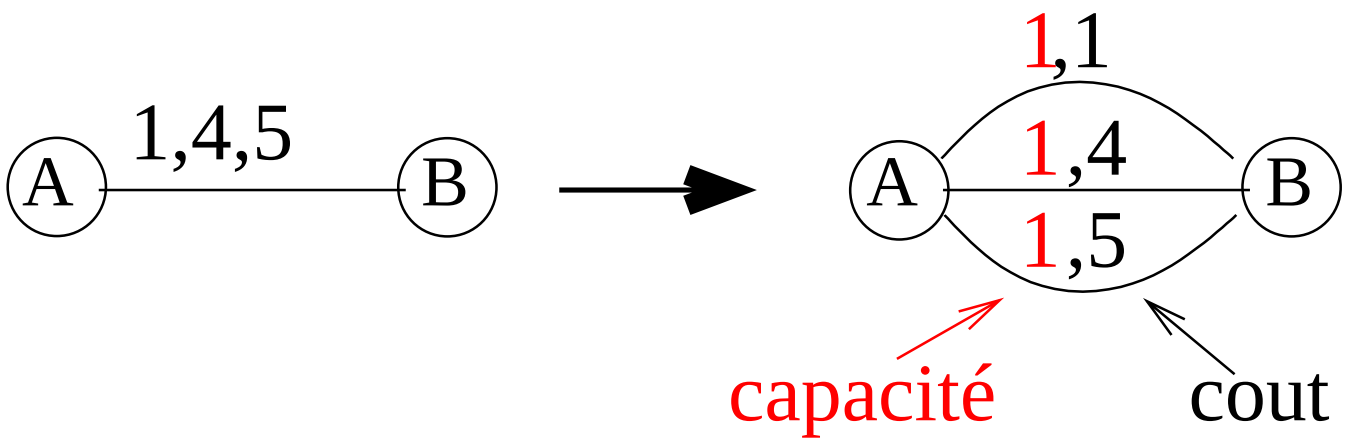
Jeu de congestion réseau symétrique= jeu de congestion réseau où tous les joueurs ont la même source et la même destination.

Jeu de congestion symétrique

Théorème [Fabrikant, Papadimitriou, Talwar2004]: *Dans les jeux de congestion réseau symétrique, un équilibre de Nash peut être trouvé en temps polynomial*

Preuve:

- Transformation du graphe: duplication des arêtes. une arête se transforme en n arêtes de capacité 1 et de coût $d_e(1), \ldots, d_e(n)$

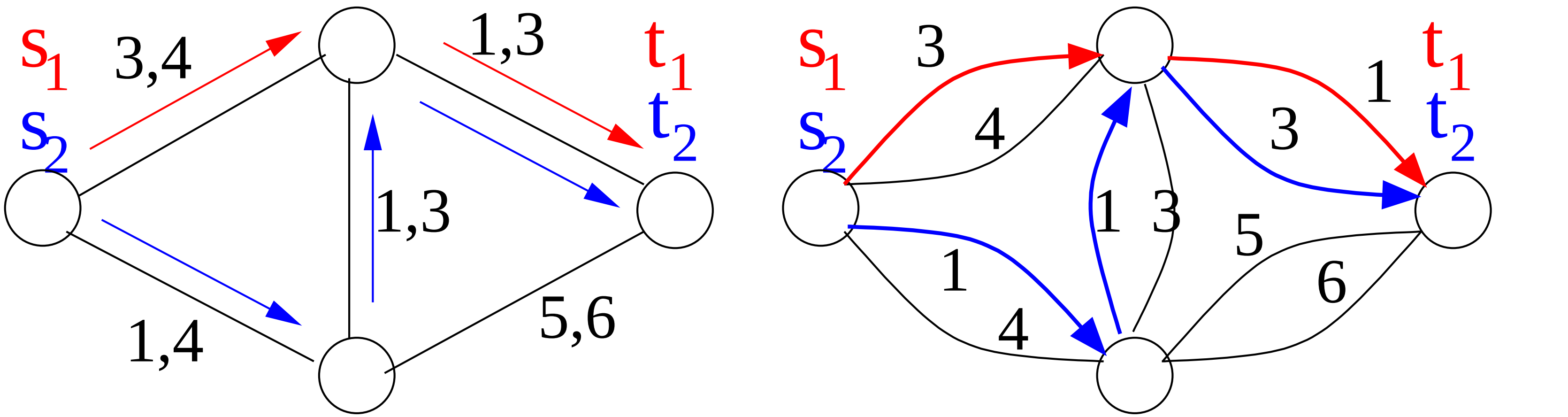


Jeu de congestion symétrique

Théorème [Fabrikant, Papadimitriou, Talwar2004]: *Dans les jeux de congestion réseau symétrique, un équilibre de Nash peut être trouvé en temps polynomial*

Preuve:

- Transformation du graphe: duplication des arêtes.
- flot entier max de coût minimun = solution minimisant ϕ



$\square$

3. Prix de l'anarchie

- Quand les joueurs concurrents partagent les resources, les allocations de ressources sont loin de l'optimal,
- Mais de combien?

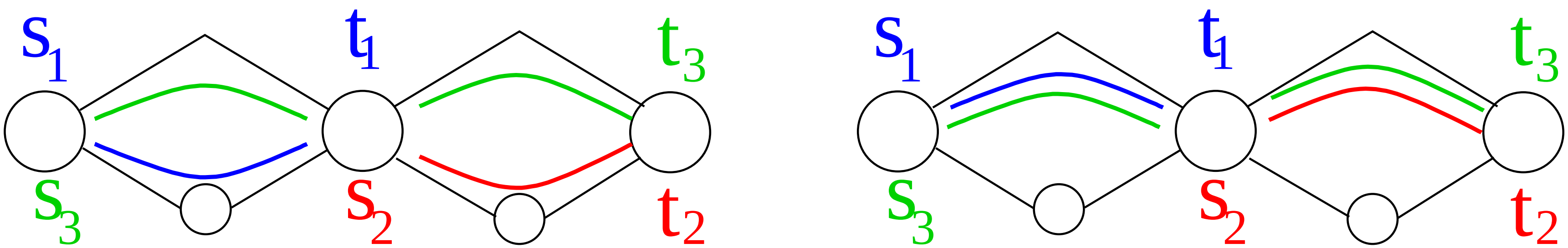
Prix de l'anarchie $= \max_{\texttt{Equilibre de Nash } E} \frac{Cout(E)}{OPT}$

- Introduction de la notion d'un coût d'un état:

$$\text{Coût Social:} \begin{cases} \text{coût moyen des joueurs} \\ \text{coût maximun des joueurs} \\ \dots \end{cases}$$

Exemple

Jeu de congestion où $cout(e) = \#$ de chemins traversant e:



Equilibre de Nash 2,2,2 Equilibre de Nash 2,2,4

- Pour le coût social = coût moyen des joueurs:

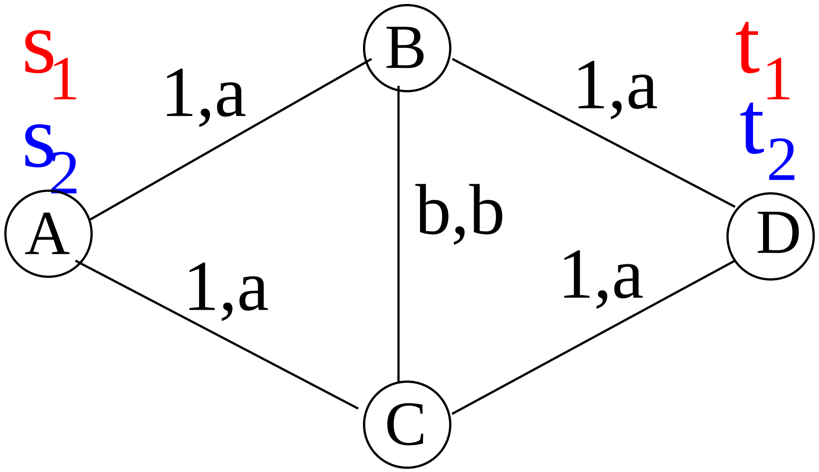
$$PA = \frac{2+2+4}{2+2+2} = \frac{4}{3}$$

- Pour le coût social = coût max des joueurs :

$$PA = \frac{4}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Prix de l'arnarchie.

Jeu de congestion:



$$a > 2b$$

$$b > 2$$

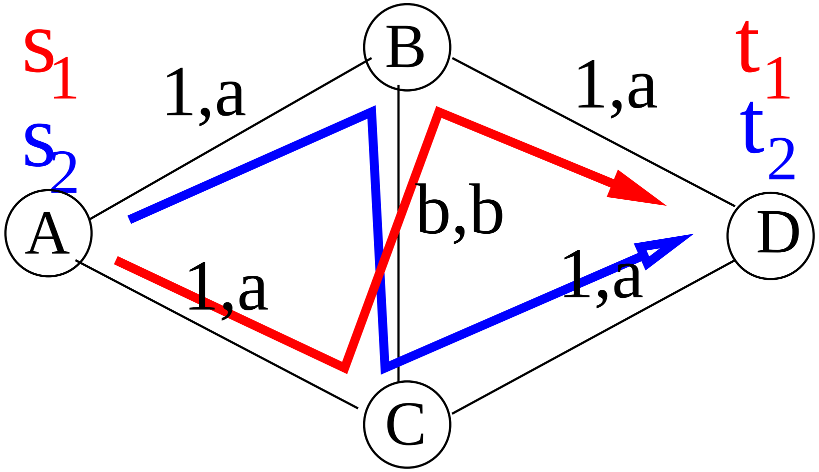
Prix de l' anarchie: $1 + \frac{b}{2}$ non borné.

- $(ABCD, ACBD)$ est un équilibre de Nash et son coût social $2 + b$
- (ABD, ACD) est un équilibre de Nash optimal et son coût social 2

avec le coût social = coût max/moyen des joueurs

Prix de l’arnarchie.

Jeu de congestion:



$$a > 2b$$

$$b > 2$$

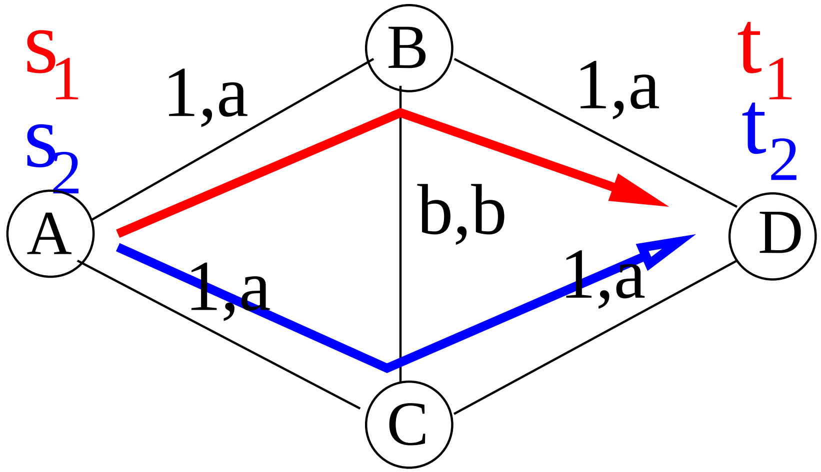
Prix de l’ anarchie: $1 + \frac{b}{2}$ non borné.

- $(ABCD, ACBD)$ est un équilibre de Nash et son coût social $2 + b$
- (ABD, ACD) est un équilibre de Nash optimal et son coût social 2

avec le coût social = coût max/moyen des joueurs

Prix de l'arnarchie.

Jeu de congestion:



$a > 2b$

$b > 2$

Prix de l' anarchie: $1 + \frac{b}{2}$ non borné.

- $(ABCD, ACBD)$ est un équilibre de Nash et son coût social $2 + b$
- (ABD, ACD) est un équilibre de Nash optimal et son coût social 2

avec le coût social = coût max/moyen des joueurs

PA pour le jeu congestion.

Les coûts des arêtes sont lineaires avec n joueurs:

		Symétrique	Asymétrique
PURE	coût social moyen	$5/2$	$5/2$
PURE	coût social max	$5/2$	$\sqrt{n}$
MIXTE	coût social moyen	≈ 2.618	≈ 2.618
MIXTE	coût social max	$??$	$??$

- 2004 Awerbuch $\&$ Azar $\&$ Epstein
- 2004: Gairing $\&$ Lucking $\&$ Mavronikolas $\&$ Monien
- 2004: Suri $\&$ Toth $\&$ Zhou
- 2005: Christodoulou $\&$ Koutsoupias

PA pour le jeu d'allocation de tâches.

	Machine Identiques	Modèle général
Pure	$2 - \frac{1}{m}$	$\Theta\left(\frac{\log m}{\log \log m}\right)$
Mixte	$\Theta\left(\frac{\log m}{\log \log m}\right)$	$\Theta\left(\frac{\log m}{\log \log \log m}\right)$

- 1999: Koutsoupias & Papadimitrious
- 2001: Mavronicolas & Sirakis
- 2002: Czumaj & Vöcking