Allocation de tâches et théorie des jeux.

Johanne Cohen

Johanne.Cohen@loria.fr

1) Allocation de tâches.

1. Définition sous forme d'un jeu.
2. Existence d'un équilibre de Nash

Allocation des tâches.

- m machines (serveurs),
- n tâches (égoistes) ayant pour temps d'exécution $\{w_1, \ldots, w_n\}$ et ayant un ensemble de choix de serveurs S_j pour la tâche j.
- Charge L_i d'un serveur i = somme des tps d'exécution sur le serveur.
- Coût d'une tâche = charge d'un serveur l'hébergeant.

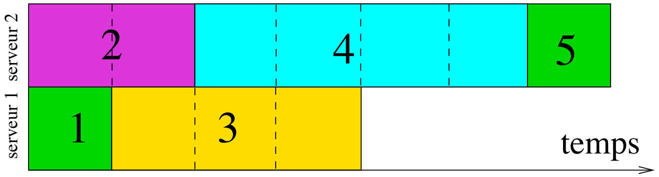
Allocation des tâches.

- 1 joueur = 1 tâche.
- L'ensemble des stratégies d'un joueur j = l'ensemble des serveurs S_j qui peut l'héberger.
- utilité d'un joueur j: $u_j(M) = L_i$ sachant que

  dans la configuration M, le joueur j choisit d'être placé sur le serveur i.

Exemple: allocation de tâche

- 2 serveurs, 5 tâches,
- Une affectation $L_2 = 7$, $L_1 = 4$



- Utilité :

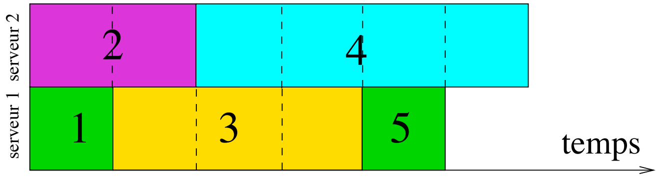
tâche	utilité
1	4
3	4

tâche	utilité
2	7
4	7
5	7

- Une tâche peut-elle améliorer son utilité? OUI

Exemple: allocation de tâche

- 2 serveurs, 5 tâches,
- Une affectation $L_1 = 5$, $L_1 = 6$



- Utilité :

tâche	utilité
1	5
3	5
5	5

tâche	utilité
2	6
4	6

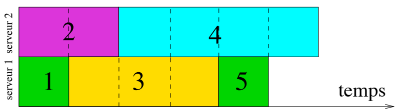
- Une tâche peut-elle améliorer son utilité? NON

Equilibre de Nash dans ce contexte.

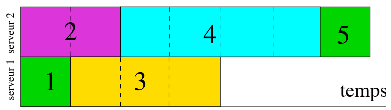
Une affectation de n tâches est un équilibre de Nash si pour toutes les tâches j,

Si j est affecté à la machine i, et
si j peut être affecté à la machine k alors,

$$L_i \leq L_k + m_j$$



Equilibre de Nash



$\neg$ Equilibre de Nash

Existence d'un équilibre de Nash.

Theoreme : *Dans le jeu d'allocation, le jeu a un équilibre de Nash basé sur des stratégies pures.*

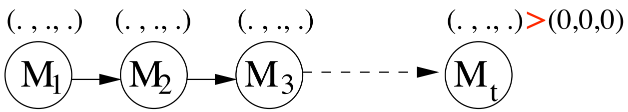
Preuve:

1. Soit M une affectation et $\{(L_i)_i\}$ les tps de réponses.
2. $\bar{v}(M) = \{L_1, L_2, \dots, L_m\}$ avec $L_1 \geq L_2 \geq \dots \geq L_m$
3. Si la tâche j veut migrer du serveur i vers k, alors on est dans la situation
   - $L_i \searrow$ et $L_k \nearrow$
   - $k > i$.
   - $\bar{v}(M) > \bar{v}(M')$ avec $M' = M \oplus$ la tâche i est hébergée par le serveur k.

$\square$

Suite la preuve de l'∃ d'un NE.

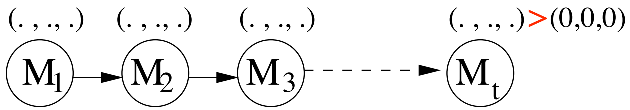
1. Soit M une affectation, $r_1(L_1) \geq r_1(L_2) \geq \ldots \geq r_m(L_m)$
2. $t \leftarrow 1$ et $M_0 \leftarrow M$
3. Tant qu'∃ une tâche j veut migrer de i vers k dans M_t, faire
   (a) $M_{t+1} \leftarrow M_t \oplus$ déplacement de j de i vers k
   (b) $t \leftarrow t + 1$
4. M_t est un équilibre de Nash.



Existence d'un équilibre de Nash.

Theoreme : *Dans le jeu d'allocation, le jeu a un équilibre de Nash basé sur des stratégies pures.*
Preuve:

1. Soit M une affectation, $r_1(L_1) \geq r_1(L_2) \geq \ldots \geq r_m(L_m)$
2. L'algorithme, se termine-t-il ? Oui car



3. Il se termine mais en temps exponentiel.

□

Petite remarque

- $C_{max}(M) = \max_i(L_i)$ (temps de réponse le + long)
- Quel est le meilleur NE ?

Theoreme : *Le jeu a un NE tel que* $C_{max}(M) = \min\{C_{max}(M') : M' \ configuration\}$.
Preuve:

- Soit M' une configuration telle que $C_{max}(M') = \min\{C_{max}(M') : M' \ configuration\}$
- Appliquer l'algorithme précédent sachant que toutes les changements de configurations n'augmentent pas C_{max}

□

Constatation: (1/2)

Theoreme : *Si toutes les tâches peuvent se placer sur n'importe quel serveur, alors*

$$\forall \text{ NE } M,\ C_{max}(M) \leq 2C^*_{max}$$

avec $C^*_{max} = \min\{C_{max}(M') : M' \ configuration\}$
Preuve:

- Soit M un NE ayant sa charge max sur le serveur i.
- Soit j une tâche affectée sur la machine i.
- Si j ne veut pas migrer sur un artre serveur alors $\forall k \in [m], L_i \leq L_k + w_k$
- Appliquer sur tous les serveurs $\sum_k L_k \geq m(L_i - w_k)$
- ....

□

Constatation: (2/2)

- $\sum_k L_k \geq m(L_i - w_j) \Rightarrow \frac{\sum_k L_k}{m} + w_j \geq L_i$
- $\forall$ affectation M', $C_{max}(M') \geq w_j$ et $\sum_k L_k \geq \sum_h w_h$
- la charge moyenne $= \frac{\sum_h w_h}{m}$
- Donc C^*_{max} $\geq$charge moyenne
  $C_{max}(M) = L_i \leq \frac{\sum_h w_h}{m} + w_j \leq C^*_{max} + C^*_{max}$

Prix de l'anarchie

- Quand les joueurs concurrents partagent les ressources, les allocations de ressources sont loin de l'optimal,
- Mais de combien?

  Prix de l'anarchie $= \max_{\texttt{quilibre de Nash } E} \frac{Cout(E)}{OPT}$
- Introduction de la notion d'un coût $Cout(E)$:

Coût Social: $\begin{cases} \text{coût moyen des joueurs} \\ \text{coût maximum des joueurs} \\ \ldots \end{cases}$

Application sur le prob. d'allocation.

Theoreme : *Si toutes les tâches peuvent se placer sur n'importe quel serveur, alors*

$\forall$ *NE* M, $C_{max}(M) \leq 2C^*_{max}$

avec $C^*_{max} = \min\{C_{max}(M') : M'\ configuration\}$

Dans ce contexte, le prix de l'anarchie est de 2.

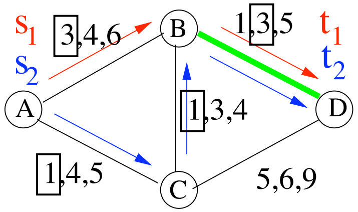
2) Congestion games: problème de routage.

Problématique du routage (atomique)

Instance : $G=(V,E)$ un graphe orienté,
k couples $(s_i,t_i)\in V^2$, pour $i\in[1,\dots,k]$
$d_e(x)$= coût de l'arête e si x chemins la traversent.

Objectif: Trouver k chemins P_i reliant s_i à t_i sachant le coût d'un chemin P est $\sum_{e\in P} d_e(f(e))$, où $f(e)$ est le nombre de chemins passant par e.

$c(P_1)=3+3=6$
$c(P_2)=1+1+3=5$



Jeu de congestions réseau

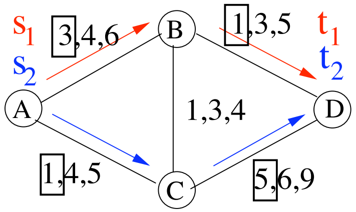
Jeu de congestions:

- Ensemble fini E de ressources,
- Fct non-décroissante d de coût: $d: E\times\{1,\dots,n\}\to Z$,
- Ensemble de stratégies S_i (sous-ensemble de E),
- Coût d'un joueur: $\sum_{e\in S_i} d_e(f_e(e))$.

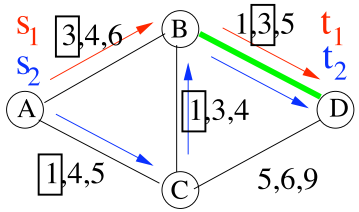
Jeu de congestions réseau: (lié au problème de routage)

- Un joueur correspond à (s_i,t_i).
- Stratégies pures: chemins entre s_i et t_i.
- Objectif du joueur i: minimiser le coût de son chemin.

Exemple de jeux de congestions.



$c(P_1)=3+1=4$
$c(P_2)=1+5=6$
N'est pas équilibre de Nash



$c(P_1)=3+3=6$
$c(P_2)=1+1+3=5$
Est équilibre de Nash

Existence d'un Eq. de Nash

Theoreme : *Les jeux d'allocations ont au moins un équilibre de Nash pur.*

Theoreme [Rosenthal73]: *Les jeux de congestions ont au moins un équilibre de Nash pur.*

Preuve utilisant les jeux de potentiel.
Un jeu de potentiel est un jeu tel qu'il existe une fct de potentiel Φ sur l'ens. des configurations telle que:

> Si le joueur i change de stratégie de s vers s' alors, Φ est modifiée de la même façon que l'utilité de i.
> $$\Phi(s',s^{-i})-\Phi(s,s^{-i})=u_i(s',s^{-i})-u_i(s,s^{-i})$$

Notation: $(s,s^{-i})=(s_1,\dots,s,\dots,s_n)$, $(s',s^{-i})=(s_1,\dots,s',\dots,s_n)$

Détermination de la fct de potentiel.

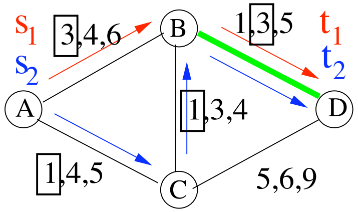
Dans les jeux de congestions réseau,

la fonction de potentiel: $\Phi(\mathcal{P}) = \sum_e \sum_{k=1}^{f(e)} d_e(k)$ avec $\mathcal{P}$ un ens. de chemins.

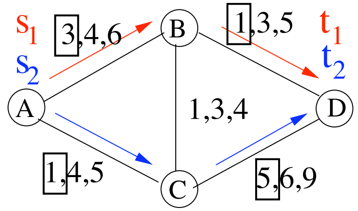
$c(P_1) = 3 + 3 = 6$

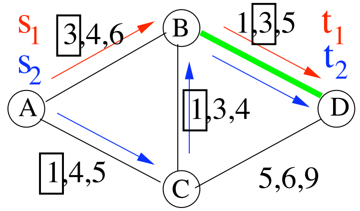
$c(P_2) = 1 + 1 + 3 = 5$

$\phi(P_1, P_2) = 1 + 1 + 3 + 1 + 3$



Changement d'états.





$c(P_1) = 3 + 1$

$c(P_2) = 1 + 5 = 6$

$\phi(P_1, P_2) = 10$

$c(P_1) = 3 + 3$

$c(P_2') = 1 + 1 + 3 = 5$

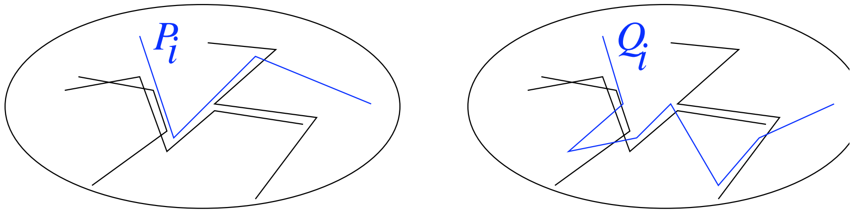
$\phi(P_1, P_2') = 5 + 1 + 3 = 9$

$$\phi(P_1, P_2) - \phi(P_1, P_2') = c(P_2) - c(P_2')$$

Changement d'états

Si le joueur i change de stratégie P_i en Q_i,

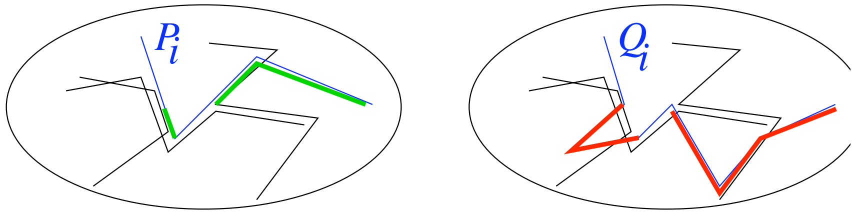
son gain = $c(Q_i \backslash P_i) - c(P_i \backslash Q_i)$



Changement d'états

Si le joueur i change de stratégie P_i en Q_i,

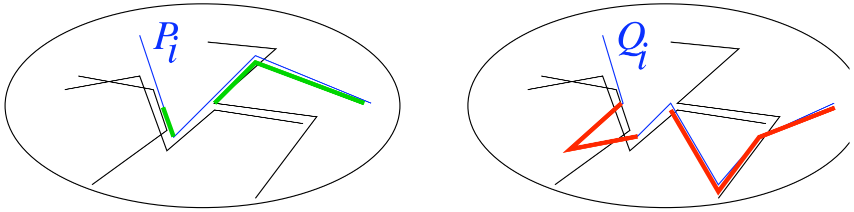
son gain = $\phi(Q_i, P^{-i}) - \phi(P_i, P^{-i})$



Changement d'états

Si le joueur i change de stratégie P_i en Q_i,

son gain = $\phi(Q_i, P^{-i}) - \phi(P_i, P^{-i})$



Équilibre de Nash= $\forall i$, i n'a pas intérêt à changer de stratégie P_i en Q_i, car son gain est ≤ 0 $(\phi(Q_i, P^{-i}) - \phi(P_i, P^{-i}) \leq 0)$

Conclusion: Minimum global de $\phi \Rightarrow$ Équilibre de Nash.

Premiers résultats

Theoreme [Rosenthal73]: *Les jeux de congestions ont au moins un équilibre de Nash pur.*

Conséquence: Un équilibre de Nash peut être calculé par un algorithme pseudo-polynomial dans les jeux de congestions.

Theoreme [MontererShapley91]: *Les jeux de congestions sont équivalents aux jeux de potentiel.*

Theoreme [Fabrikant, Papadimitriou, Talwar2004]: *Calculer un équilibre dans les jeux de congestions réseau est PLS-complet.*

Allocation de tâches et théorie des jeux. – p. 2

La classe PLS: *Polynomial Local Search.*

Problème Π dans PLS: problème d'optimisation Π [Johnson, Papadimitriou, Yannakakis88]

- ayant comme objectif le calcul de minimums locaux s (s est minimal sur le voisinage $\Gamma(s)$)
- avec Γ calculable en tps polynomial.

PLS-Réduction de Π_1 vers Π_2 (dans PLS):

Transformation polynomiale d'une instance de Π_1 vers une de Π_2,

telle que les optimaux locaux sont préservés.

Allocation de tâches et théorie des jeux. – p. 2

La classe PLS (*Polynomial Local Search.*)

Problème NAE-SAT:

- Instance: ens. de clauses où chaque clause c_i est pondérée par w_i.
- Mesure: la somme des poids de toutes les clauses satisfiables par l'affectation s (telle que chaque clause n'a pas tous ses littéraux à la même valeur).
- Voisinage Γ de s: les affectations qui diffèrent de s par la modification de l'affectation d'une seule variable.

Theoreme [Schaeffer,Yannakakis91]: *Le problème NAE-SAT est PLS-complet.*

Allocation de tâches et théorie des jeux. – p. 2

Jeu de congestions symétriques

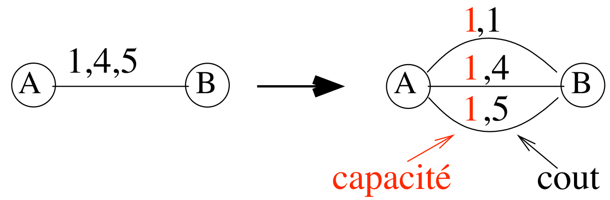
Theoreme [Fabrikant, Papadimitriou, Talwar2004]: *Dans les jeux de congestions réseau symétriques, un équilibre de Nash peut être trouvé en temps polynomial.*

Jeu de congestions réseau symétriques= jeu de congestions réseau où tous les joueurs ont la même source et la même destination.

Jeu de congestions symétriques

Theoreme [Fabrikant, Papadimitriou, Talwar2004]: *Dans les jeux de congestions réseau symétriques, un équilibre de Nash peut être trouvé en temps polynomial.*
Preuve:

- Transformation du graphe: duplication des arêtes. Une arête se transforme en n arêtes de capacité 1 et de coût $d_e(1), \ldots, d_e(n)$.

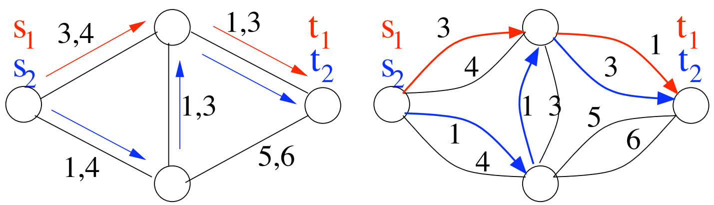


□

Jeu de congestions symétriques

Theoreme [Fabrikant, Papadimitriou, Talwar2004]: *Dans les jeux de congestions réseau symétriques, un équilibre de Nash peut être trouvé en temps polynomial.*
Preuve:

- Transformation du graphe: duplication des arêtes.
- Flot entier max de coût minimum = solution minimisant ϕ.



□

Prix de l'anarchie

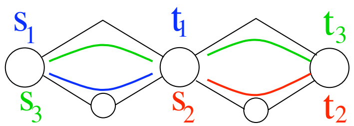
- Quand les joueurs concurrents partagent les ressources, les allocations de ressources sont loin de l'optimal,
- Mais de combien?

  Prix de l'anarchie =$\max_{\texttt{quilibre de Nash}\ E} \frac{Cout(E)}{OPT}$
- Introduction de la notion d'un coût $Cout(E)$:

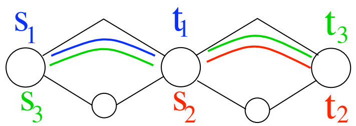
Coût Social: $\begin{cases} \text{coût moyen des joueurs} \\ \text{coût maximum des joueurs} \\ \ldots \end{cases}$

Exemple

Jeu de congestions où $cout(e) = \#$ de chemins traversant e:



Équilibre de Nash 2,2,2



Équilibre de Nash 2,2,4

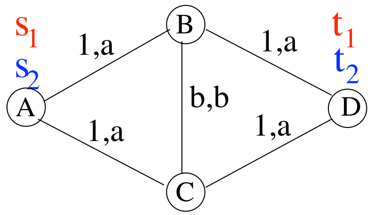
- Pour le coût social = coût moyen des joueurs:
$$PA = \frac{2+2+4}{2+2+2} = \frac{4}{3}$$
- Pour le coût social = coût max des joueurs :
$$PA = \frac{4}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Prix de l'anarchie.

Jeu de congestions:

$a > 2b$

$b > 2$



Prix de l' anarchie: $1 + \frac{b}{2}$ non borné.

- $(ABCD, ACBD)$ est un équilibre de Nash et son coût social est $2 + b$.
- (ABD, ACD) est un équilibre de Nash optimal et son coût social est 2,

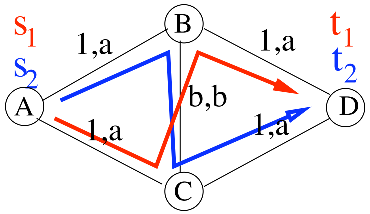
avec le coût social = coût max/moyen des joueurs.

Prix de l'anarchie.

Jeu de congestions:

$a > 2b$

$b > 2$



Prix de l' anarchie: $1 + \frac{b}{2}$ non borné.

- $(ABCD, ACBD)$ est un équilibre de Nash et son coût social est $2 + b$.
- (ABD, ACD) est un équilibre de Nash optimal et son coût social est 2,

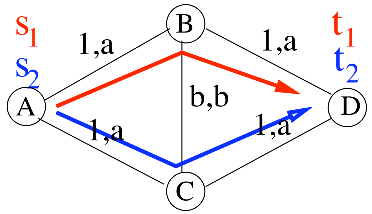
avec le coût social = coût max/moyen des joueurs.

Prix de l'anarchie.

Jeu de congestions:

$a > 2b$

$b > 2$



Prix de l' anarchie: $1 + \frac{b}{2}$ non borné.

- $(ABCD, ACBD)$ est un équilibre de Nash et son coût social est $2 + b$.
- (ABD, ACD) est un équilibre de Nash optimal et son coût social est 2,

avec le coût social = coût max/moyen des joueurs.

PA pour les jeux de congestions.

Les coûts des arêtes sont linéaires avec n joueurs:

		Symétrique	Asymétrique
PUR	coût social moyen	$5/2$	$5/2$
PUR	coût social max	$5/2$	$\sqrt{n}$
MIXTE	coût social moyen	≈ 2.618	≈ 2.618
MIXTE	coût social max	$??$	$??$

- 2004 Awerbuch & Azar & Epstein
- 2004: Gairing & Lucking & Mavronikolas & Monien
- 2004: Suri & Toth & Zhou
- 2005: Christodoulou & Koutsoupias

PA pour les jeux d'allocations de tâches.

	Machines Identiques	Modèle Général
Pur	$2 - \frac{1}{m}$	$\Theta\left(\frac{\log m}{\log\log m}\right)$
Mixte	$\Theta\left(\frac{\log m}{\log\log m}\right)$	$\Theta\left(\frac{\log m}{\log\log\log m}\right)$

- 1999: Koutsoupias & Papadimitrious
- 2001: Mavronicolas & Sirakis
- 2002: Czumaj & Vöcking