Introduction à la théorie des jeux.

Inspiré du cours d'Eva Tarvos et de Christos Papadimitrious.

1. Définition et notation.

Basket ou foot?

- Deux joueurs veulent jouer au basket ou au foot: mais ils ont des préférences:

		Joueur 2	
		B	F
Joueur 1	B	$(2,1)$	$(0,0)$
	F	$(0,0)$	$(1,2)$

- 2 stratégies possibles: (B,B) ou (F,F)
- Une stratégie pure pour un joueur i est un plan qui spécifie une action à chaque noeud où le joueur i se verrait dans l'obligation de prendre en fonction de l'état du jeu.

Equilibre de Nash

- Dans un équilibre de Nash, aucun joueur a interêt à changer sa stratégie.
- Si les joueurs acceptent de jouer vers un NE, alors aucun des deux a l' intention de dévier de cet accord.
- Attention !!! Certains jeux ne possèdent pas d'équilibre de Nash utilisant des stratégies pures.

Le jeux avec $n \leq 2$ joueurs

Est

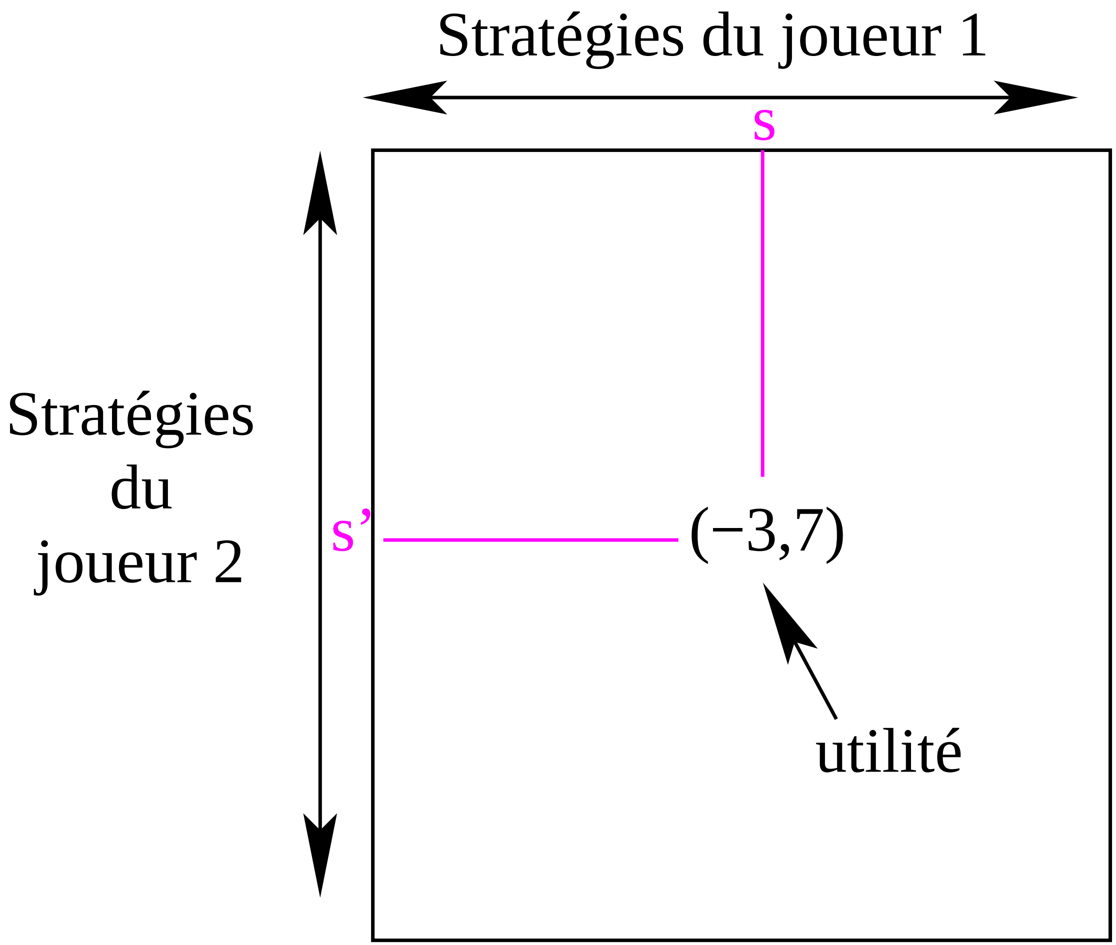
- un ensemble d'actions S_i pour chaque joueur,
- une utilité u_i pour chaque joueur: une fonction $S_1 \times \cdots \times S_n \rightarrow N$

Remarque:

- s est un état si $s \in S_1 \times \cdots \times S_n$
- un équilibre de Nash (NE) est un état $s = (s_1, \cdots, s_n)$ tel que

  $\forall i$, $\forall s_i'$ on a $u_i(s_1, \cdots, s_i, \cdots, s_n) \geq u_i(s_1, \cdots, s_i', \cdots, s_n)$.

Visualisation du jeu: forme stratégique.



REMARQUE: Généralisation à plusieurs joueurs

Le dilemme du prisonnier: énoncé

2 criminels ayant commis ensemble un crime sont arrêtés. Par manque de preuve, le procurreur ne peut les condanner que si l'un des deux avoue le crime. La police les sépare et fait une même offre à chacun. L'offre est la suivante:

1. Si vous avouez et que votre partenaire n'avoue pas, alors on vous garantie l'inmunité.
2. Si nous n'avouez pas et si votre partenaire avoue, alors vous aurez une peine de 10 ans de prison.
3. Si aucun des deux n'avoue, alors vous êtes libéré.
4. si vous avouez tous les 2, alors vous aurez une peine de 5 ans de prison.

Le dilemme du prisonnier: forme stratégique

- 2 stratégies: Avouer (A), ou, ne pas avouer (NA).
- chiffre correspond au gain d'année de "liberté".

		Prisonnier 2	
		A	NA
Prisonnier 1	A	$(5, 5)$	$(10, 0)$
	NA	$(0, 10)$	$(10, 10)$

- Etat le plus favorable (NA, NA).
- Equilibre de Nash: (NA, NA) et (A, A).
- Mais que va choisir chacun criminel?

Le coût social

		Prisonnier 2	
		A	NA
Prisonnier 1	A	$(5,5)$	$(10,0)$
	NA	$(0,10)$	$(10,10)$

- Etat le plus favorable (NA, NA).
- Equilibre de Nash: (NA, NA) et (A, A).
- Mais que va choisir chacun criminel?
- le cout social = somme des utilités des joueurs.

e dilemme du prisonnier: forme stratégiqu

- Avouer ou ne pas Avouer? avouer est “moins risquer”.
- Utilité =

		Prisonnier 2	
		A	NA
Prisonnier 1	A	$(5, 5)$	$(10, 0)$
	NA	$(0, 10)$	$(10, 10)$

2. LE JEU DE PLACEMENT DE TÂCHES

Allocation des tâches.

- m machines (serveurs),
- n tâches (égoistes) ayant pour temps d'exécution $\{w_1, \ldots, w_n\}$ et ayant un ensemble de choix de serveurs S_j pour la tâche j.
- Charge L_i d'un serveur i = somme des tps d'exécution sur le serveur.
- cout d'une tâche = temps de réponse d'un serveur l'hébergeant qui est proportionnel à sa charge.

$r_i(x)$: le tps de réponse sur le serveur i en fonction de la charge x.

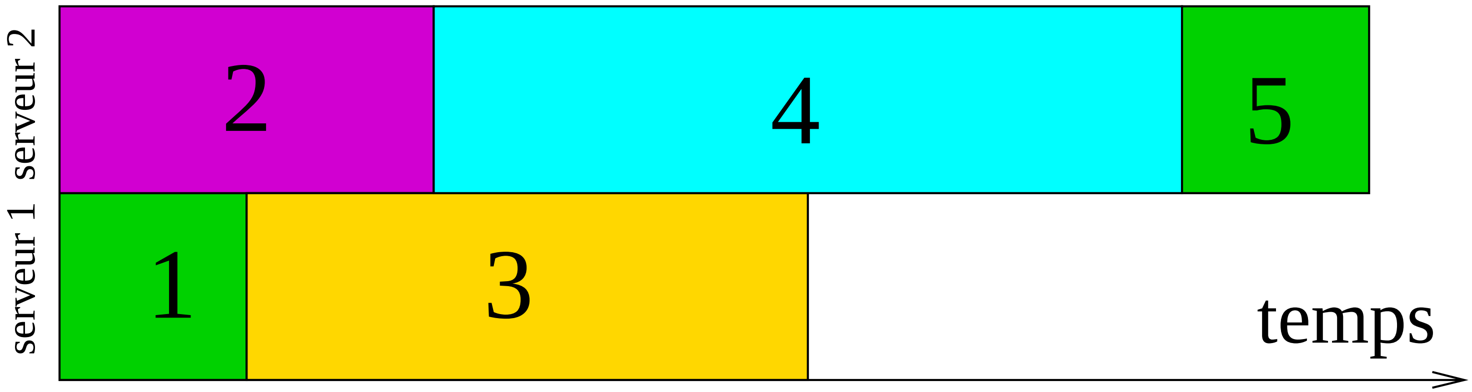
Allocation des tâches.

- 1 joueur = 1 tâche.
- L'ensemble des stratégies d'un joueur j = l'ensemble des serveurs S_j qui peut l'héberger.
- utilité d'un joueur j: $u_j(M) = r_i(L_i)$ sachant que

  dans la configuration M, joueur j choisit d'être placé sur le serveur i.

Exemple: allocation de tâche

- 2 serveurs, 5 tâches, $\forall i \in \{1, 2\}, r_i(x) = x$
- Une affectation



$L_1 = 7$, $L_1 = 4$, et avec

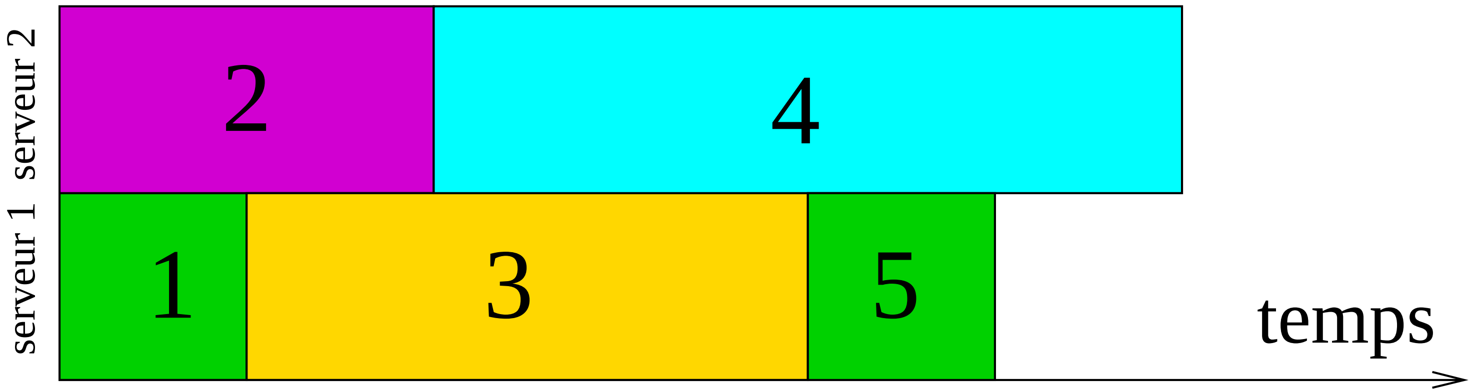
Une tâche peut-elle améliorer son utilité?

tâche	utilité
1	4
3	4

tâche	utilité
2	7
4	7
5	7

Exemple: allocation de tâche

- 2 serveurs, 5 tâches, $\forall i \in \{1,2\}, r_i(x) = x$
- Une affectation



$L_1 = 7$, $L_1 = 4$, et avec

Une tâche peut-elle améliorer son utilité?

tâche	utilité
1	4
3	4

tâche	utilité
2	7
4	7
5	7

Allocation des tâches: NE

- Si m machines (serveurs) sont identiques,$\forall i \in [1, \ldots, m], r_i(x) = r(x)$
- une affectation de n tâches est un NE Si

Si pour toutes les tâches j,
Si j est affecté à la machine i, et si j peut être affecté à la machine k alors,

$$L_i \leq L_k + m_j$$

Allocation des tâches: Notation

- Hypothèse: chaque serveur i a un temps de réponse propre:

  $r_i(x)$: le tps de réponse sur le serveur i en fonction de la charge x.

- r_i fonction monotone croissante
- Une affectation de n tâches est un NE si pour toutes les tâches j,

  Si j est affecté à la machine i, et si j peut être affecté à la machine k alors, $r_i(L_i) \leq r_k(L_k + m_j)$

Existance d'un équilibre de Nash.

Théorème 1: Si le temps de réponse de chaque serveur i est une fonction monotone croissante non négatif, alors le jeu a un équilibre de Nash basé sur des stratégies "pures".

Preuve:

1. Soit M une affectation($\neg$NE) et $\{r_i(L_i)\}$ les tps de réponses.
2. $r_1(L_1) \geq r_1(L_2) \geq \cdots \geq r_m(L_m)$
3. Si la tâche j veut migrer du serveur i vers k, alors
   - $L_i \searrow$ et $L_k \nearrow$
   - $k > i$.

Existance d'un équilibre de Nash.

Théorème 1: Si le temps de réponse de chaque serveur i est une fonction monotone croissante non négatif, alors le jeu a un équilibre de Nash basé sur des stratégies "pures".

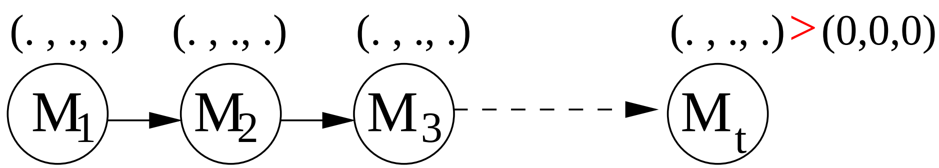
Preuve:

1. Soit M une affectation, notons $\bar{v}(M) = \{L_1, L_2, \ldots, L_m\}$ tel que $r_1(L_1) \geq r_1(L_2) \geq \cdots \geq r_m(L_m)$
2. Si la tâche j veut migrer du serveur i vers k, alors $\bar{v}(M) > \bar{v}(M')$
   - avec M' une configuration identique à M sauf que la tâche i est hébergée par le serveur k.
   - avec $>$ l'ordre lexicographique.

Existance d'un équilibre de Nash.

Preuve:

1. Soit M une affectation, $r_1(L_1) \geq r_1(L_2) \geq \cdots \geq r_m(L_m)$
2. $t \leftarrow 1$ et $M_0 \leftarrow M$
3. Tant qu'$\exists$ une tâche j veut migrer de i vers k dans M_t, faire
   (a) $M_{t+1} \leftarrow M_t \oplus$ déplacement de j de i vers k
   (b) $t \leftarrow t+1$
4. M_t est un NE.



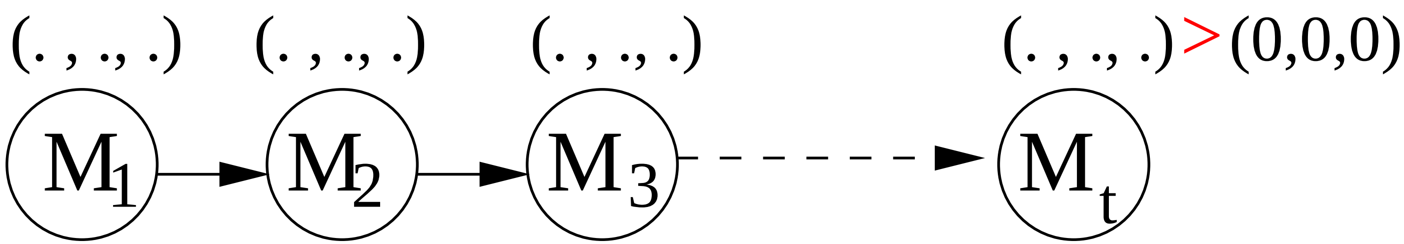
$\square$

Existance d’un équilibre de Nash.

Théorème 1: Si le temps de réponse de chaque serveur i est une fonction monotone croissante non négatif, alors le jeu a un équilibre de Nash basé sur des stratégies “pures”.

Preuve:

1. Soit M une affectation, $r_1(L_1) \geq r_1(L_2) \geq \cdots \geq r_m(L_m)$
2. L’algorithme, se termine-t-il ? Oui car



3. Il se termine mais en temps exponentiel.

□

Petite remarque

- $C_{max}(M) = \max_i r_i(L_i)$ (temps de réponse le + long)
- Quel est le meilleur NE ?

Théorème 1: Si le temps de réponse de chaque serveur i est une fonction monotone croissante non négatif, alors le jeu a un NE avec $C_{max}(M) = \min\{C_{max}(M') : M'\ configuration\}$.

Preuve:

- Soit M' une configuration telle que $C_{max}(M') = \min\{C_{max}(M') : M'\ configuation\}$
- Appliquer l'algorithme précédent sachant que toutes les changements de configurations n'augmentent pas C_{max}

Constatation: (1/2)

Théorème 1: Si $\forall i \in [1,\ldots,m]\ r_i(x) = (x)$, et si toutes les tâches peuvent se placer sur n'importe quel serveur, alors

$$\forall M \text{ NE}, C_{max}(M) \leq 2C^*_{max}$$

avec $C^*_{max} = \min\{C_{max}(M') : M'\ configuration\}$ **Preuve**:

- Soit M un NE ayant sa charge max sur le serveur i.
- Soit j une tâche affectée sur la machine i.
- Si j ne veut pas migrer sur un artre serveur alors $\forall k \in [m], L_i \leq L_k + w_k$
- Appliquer sur tous les serveurs $\sum_k L_k \geq m(L_i - w_k)$
- ....

$\square$

Constatation: (2/2)

Théorème 1: Si $\forall i \in [1, \ldots, m]\ r_i(x) = (x)$, et si toutes les tâches peuvent se placer sur n'importe quel serveur, alors

$$\forall M \text{ NE}, C_{max}(M) \leq 2C_{max}$$

avec $C^*_{max} = \min\{C_{max}(M') : M'\ configuration\}$

Preuve:

- $\sum_k L_k \geq m(L_i - w_j) \Rightarrow \frac{\sum_k L_k}{m} + w_j \geq L_i$
- $\forall$ affectation M', $C_{max}(M') \geq w_j$ et $\sum_k L_k \geq \sum_h w_h$
- la charge moyenne $= \frac{\sum_h w_h}{m}$
- Donc $C^*_{max} \geq$charge moyenne

  $C_{max}(M) = L_i \leq \frac{\sum_h w_h}{m} + w_j \leq C^*_{max} + C^*_{max}$

$\square$

les jeux utilisant les potentiels.

CAS PARTICULIER:

- $\forall j \in [n],\ w_j = 1$
- S_j : ens. des serveurs qui peuvent héberger j

REMARQUE: charge d'un serveur= nombre de tâches.

FONCTION POTENTIELLE: fonction potention d'une affectation:

$$\Phi(M) = \sum_i \sum_{k=1}^{L_i} r_i(k)$$

les jeux utilisant les potentiels.

COUT SOCIAL: $C(M) = \sum_i L_i \times r_i(L_i)$

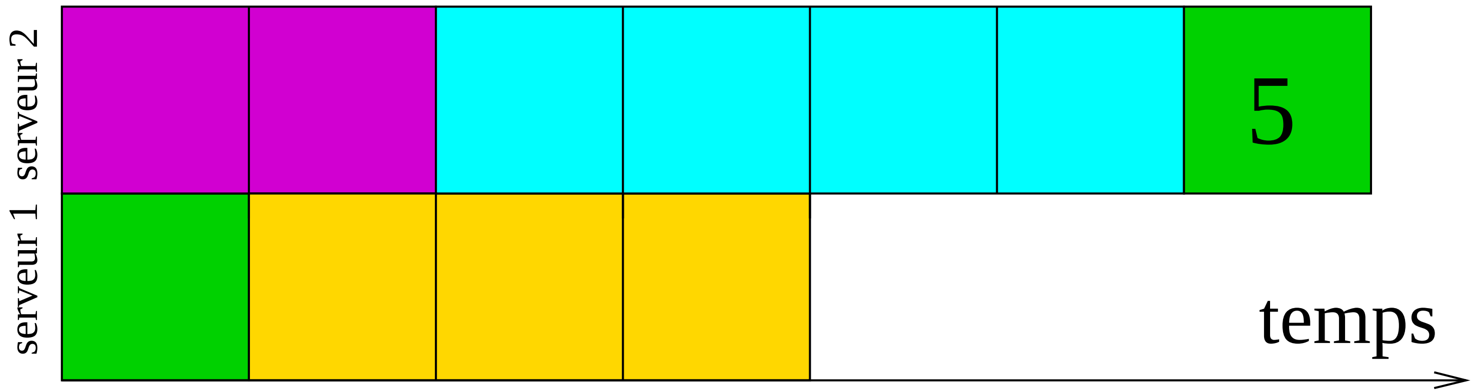
FONCTION POTENTIELLE: fonction potention d'une affectation:

$$\Phi(M) = \sum_i \sum_{k=1}^{L_i} r_i(k)$$

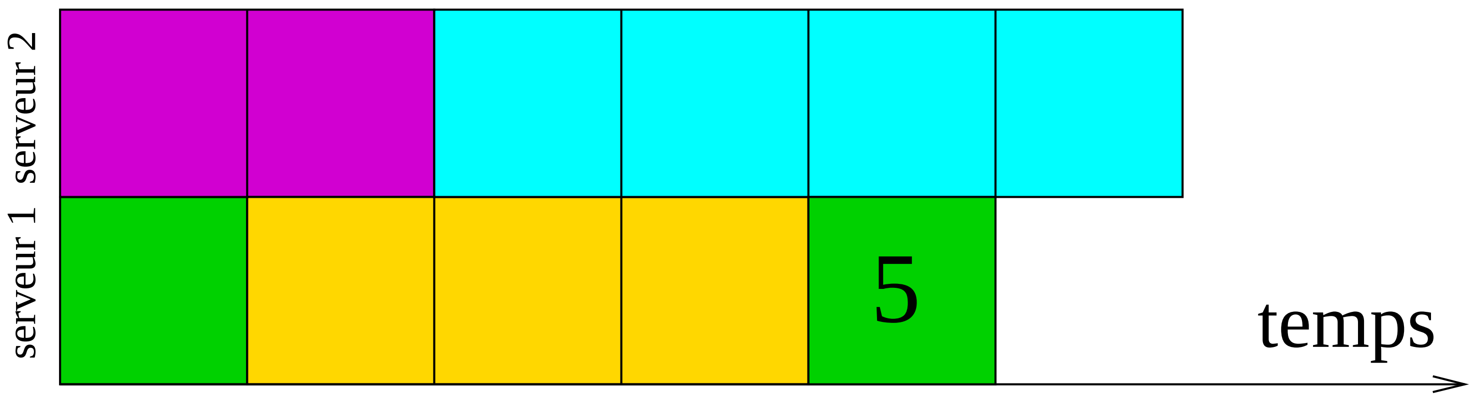
INTERPRÉTATION:

- l'arrivée un nouvelle tâche provoque un cout supplémentaire
- quand la j^{ime} tâche arrive, alors le serveur i modifie son cout $r(L_i)$.
- modélisation d'un changement de cout.

Exemple

- $M =$ 

$$L_1 = 7, L_1 = 4, \Phi(M) = 38$$

- $M' =$ 

$$L_1 = 6, L_1 = 5, \Phi(M) = 36$$

Rapport entre utilité et fct de potentielle

Théorème 1: Soit M une affectation. Soit M' une affectation dérivé de M tel que le joueur j se déplace du serveur i au serveur k.
Alors la modification de la fonction potentielle est égale a celle du temps de réponse de i. Soit:

$$\Phi(M) - \Phi(M') = r_i(L_i) - r_k(L_k + w_j)$$

Preuve du théorème

- la charge du serveur i diminue de 1. Et celle de $k \nearrow 1$.
- Q : la quantité commune de M et M'.
- $\Phi(M) = Q + \sum_{\ell=1}^{L_i} r_i(\ell) + \sum_{\ell=1}^{L_k} r_k(\ell)$
- $\Phi(M') = Q + \sum_{\ell=1}^{L_i-1} r_i(\ell) + \sum_{\ell=1}^{L_k+1} r_k(\ell)$
- Donc $\Phi(M) - \Phi(M') = r_i(L_i) - r_k(L_k + 1)$

Définition des jeux de potentiel

Un jeu est un jeu de potentiel si il existe une fonction de potentielle Φ tel que

- Si le joueur i change de stratégie de s vers s' alors la fonction de potentielle Φ est modifié de la meme façon que l'utilité de i.

$$\Phi(s_1,\ldots,s,\ldots,s_n)-\Phi(s_1,\ldots,s',\ldots,s_n) = u_i(s_1,\ldots,s,\ldots,s_n)-u_i(s_1,\ldots,s',\ldots,s_n)$$

REMARQUE: Le jeu d'équilibrage de charge est un jeu de potentiel.

relation entre le cout et les NE

Théorème 1: Tous les jeux de potentiel sur des ens. finis de stratégue ont des équilibre de Nash.

Preuve:

- Objectif: Montrer que NE= minimum local de la fonction de potentielle. Par contradiction,
- Supposons que les minimums locaux solutionsde la fonction de potentielle n'est pas NE.
- il existe un joueur i qui peut améliorer son utilité (en changant de stratégie).
- Par définition, la nouvelle solution obtenue par ce changement provoque une diminution de la fonction de potentielle.

Borne sur la qualité de l'équilibre de NE.

Théorème 1: Soit un jeu de potentiel avec un cout C et une fonction de potentielle Φ tel que $\Phi(M) \leq C(M) \leq \alpha\Phi(M)$ avec M toutes les solutions M et pour certains α.
il existe un NE M te que $C(M) \leq \alpha \min_{M'} C(M')$ où M' est le minimum parmi toutes les solutions possibles

REMARQUE: Dans notre exemple:

- $\Phi(M) \leq C(M)$
- si $r_i(x) = x$ alors $\alpha = 2$ car $1 + 2 + \cdots + L \leq L^2/2$

Borne sur la qualité de l'équilibre de NE.

Théorème 1: Soit un jeu de potentiel avec un cout C et une fonction de potentielle Φ tel que $\Phi(M) \leq C(M) \leq \alpha\Phi(M)$ avec M toutes les solutions M et pour certains α.
il existe un NE M te que $C(M) \leq \alpha \min_{M'} C(M')$ où M' est le minimum parmi toutes les solutions possibles

Preuve:

- Soit M une solution qui minimise $\Phi(M)$
- M est un équilibre de NE.
- $C(M) \leq \alpha\Phi(M)$? oui car
  - $\Phi(M) \leq C(M) \leq \alpha\Phi(M)$.
  - M' solution qui minimise $min_{M''}C(M'')$
  - $C(M) \leq \alpha\Phi(M) \leq \alpha\Phi(M') \leq \alpha C(M')$

Remarque importante

Trouver un NE correspond à trouver un minimun local pour un problème d'optimisation.

Résultat de Fabrikant Papadimitriou Talwar

Théorème 1: Trouver un NE est ce jeu est PLS-complete où PLS et une classe de problèmes d'optimisation dont le but est de trouver un minimun local.

(En résumé: c'est un problème difficile à trouver)