Le problème du Voyageur de Commerce

Johanne Cohen

Johanne.Cohen@loria.fr

Laboratoire LORIA

Ennoncé du problème

Un représentant doit visiter n villes. Le représentant souhaite faire une tournée en visitant chaque ville au moins exactement 1 fois et en terminant à sa ville de départ.

Traduction en un problème de décision

INSTANCE:

$G = (V, E)$ un graphe complet

une fonction cout $c : V \times V \to \mathbb{Z}$

un rationnel $k \in \mathbb{Z}$

QUESTION:

Existe-t-il un tournée $\mathcal{R}$ de coût au plus égale àk?

Theorème 1: Le problème du Voyageur de Commerce est NP-complet.

Inégalité triangulaire

Définition:

La fonction de coût vérifie l'inégalité triangulaire si

pour 3 sommets u, v, w arbitraires de V,

$$c(u, v) \leq c(u, v) + c(v, w)$$

Théorème 2: Le problème du Voyageur de Commerce avec la fonction de coût vérifiant l'inégalité triangulaire est NP-complet.

Algorithme

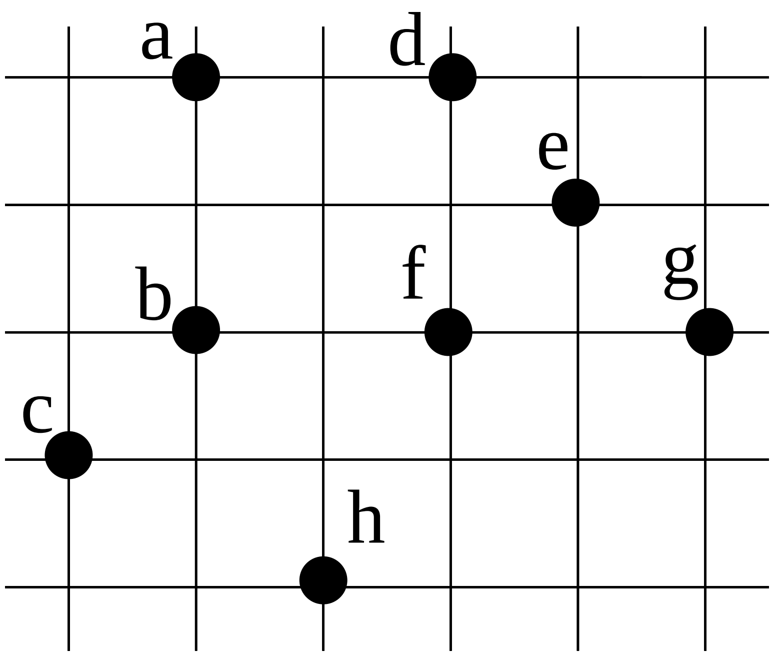
ENTRÉE: $G = (V, E)$ un graphe complet et un rationnel $k \in \mathbb{Z}$
une fonction cout $c : V \times V \to \mathbb{Z}$

SORTIE: un cycle hamiltonien.

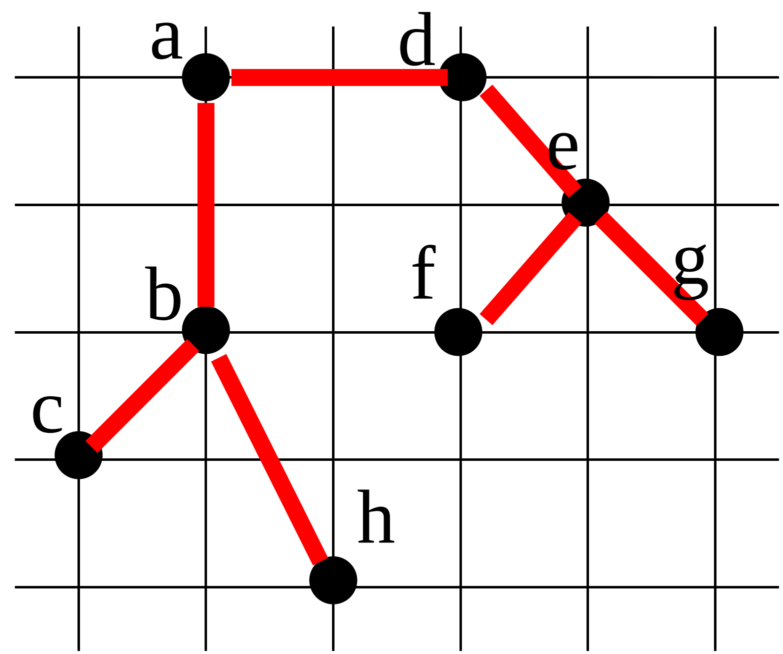
ALGORITHME:

1. coisir un sommet $r \in V$ comme racine.
2. Construire un arbre couvrant minimal T dans G à partir de la racine r.
3. Soit L la liste des sommets visités lors d' un parcours préfixe.
4. retourner le cycle hamiltonien. H qui visite les sommets dans l' ordre de L

Illustration de l'algorithme

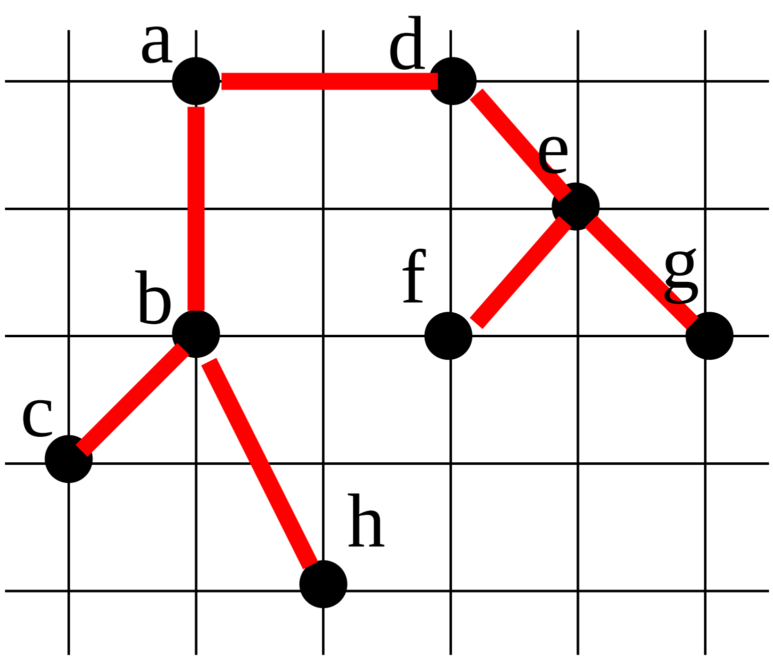


instance

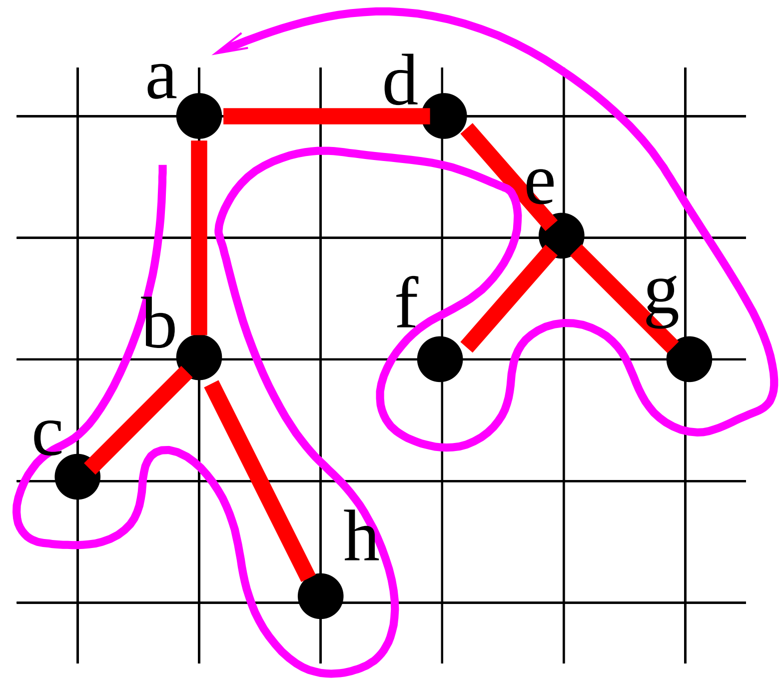


arbre couvrant

Illustration de l'algorithme

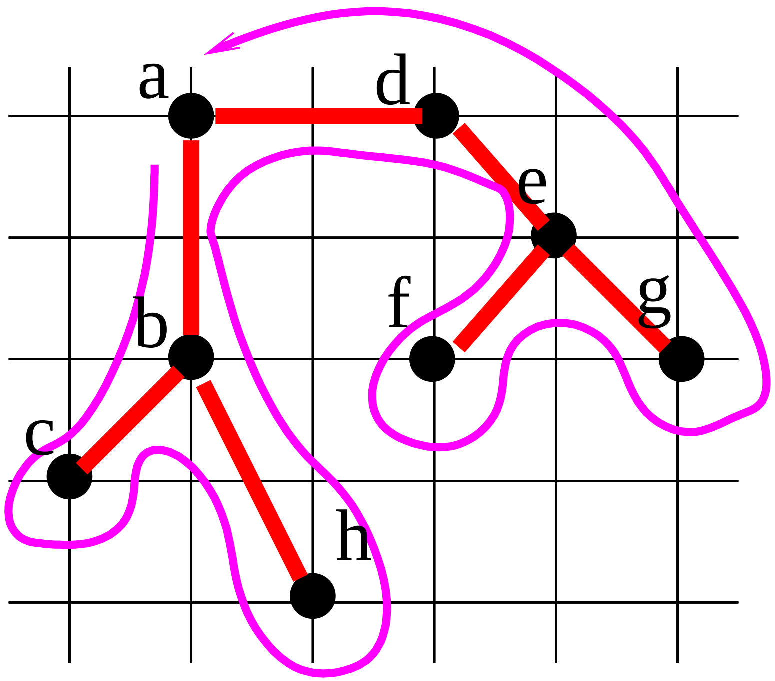


arbre couvrant

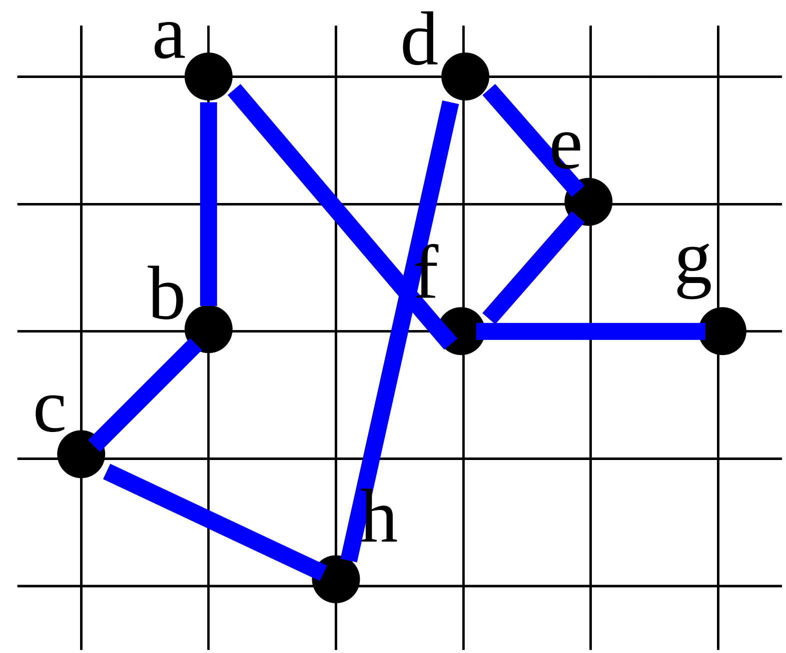


parcours préfixe

Illustration de l’algorithme



parcours préfixe



solution

Facteur d'approximation

Théorème 2: L'algorithme retourne une solution à un facteur 2 de l'optimal.

Preuve:

Soit H^* la tournée optimale

Il reste donc à prouver que $c(H) \leq 2c(H^*)$

Soit T arbre couvrant minimal: $c(T) \leq c(H^*)$

Soit W le parcours de l'arbre T (ajout d'un sommet dans la liste dès que l'on les rencontre lors su parcours).

$\square$

Facteur d'approximation

Theorème 2: L'algorithme retourne une solution à un facteur 2 de l'optimal.

Preuve:

Soit T arbre couvrant minimal: $c(T) \leq c(H^*)$

Soit W le parcours de l'arbre T (ajout d'un sommet dans la liste dès que l'on les rencontre lors su parcours).

□

Facteur d'approximation

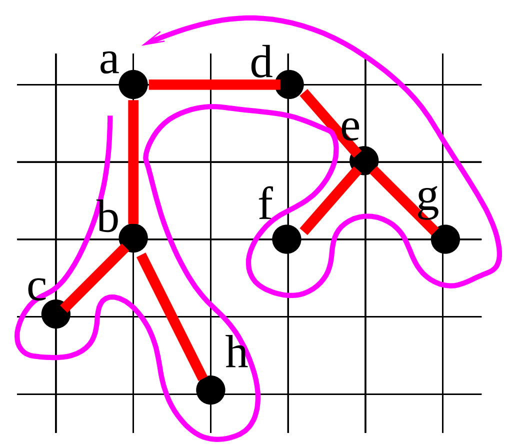
Theoreme 2: L'algorithme retourne une solution à un facteur 2 de l'optimal.

Preuve:

Soit T arbre couvrant minimal: $c(T) \leq c(H^*)$

Soit W le parcours de l'arbre T (ajout d'un sommet dans la liste dès que l'on les rencontre lors su parcours).

parcours $a, b, c, b, h, a, d, e, f, e, g, e, d, a.$



$c(H) \leq 2c(H^*)$ **?**

Preuve:

1. Soit T arbre couvrant minimal: $c(T) \leq c(H^*)$

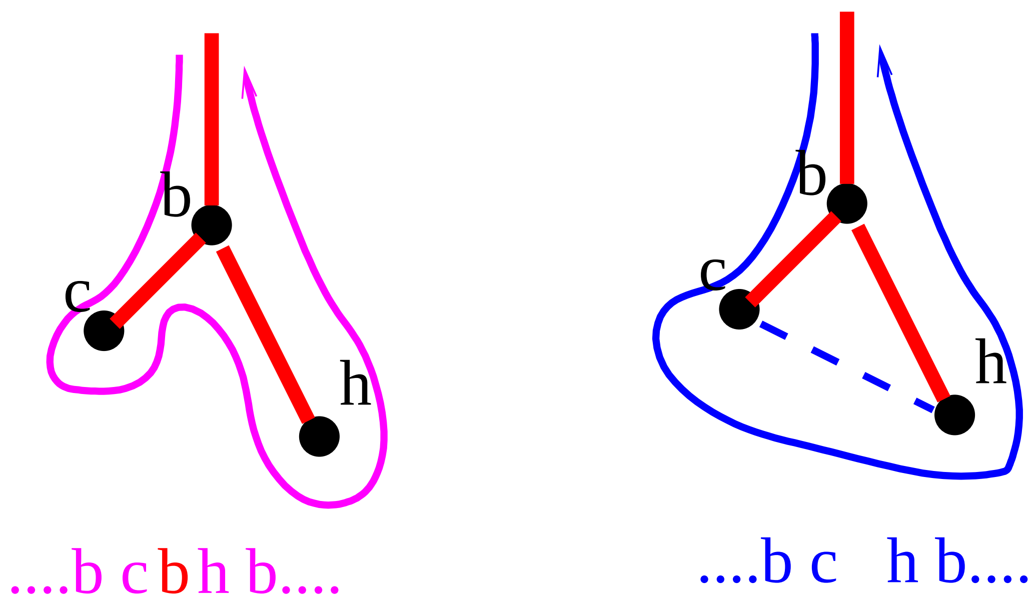
   Soit W le parcours de l'arbre T (liste des sommets dès que l' on les rencontre).

2. $c(W) = 2c(T)$ car 1 arête est visitée 2 fois.
3. Donc $c(W) \leq 2c(H^*)$ grâce à (1) et (2).
4. On peut supprimer 1 sommet de W sans augmenter le coût (grâce à l'inégalité triangulaire).
5. Donc $c(H) \leq c(W) \leq 2c(H^*)$

$\square$

Plus précisement,

On peut supprimer 1 sommet de W sans augmenter le coût (grâce à l'inégalité triangulaire).



$$c(b,c)+c(c,h)+c(h,b)+\cdots \leq c(b,c)+c(c,b)+c(b,h)+c(h,b)+\ldots$$

car $c(c,h) \leq c(c,b) + c(b,h)$ grâce à l'inégalité triangulaire

Pb. général du Voyageur de Commerce

Theorème 2: Si $P \neq NP$ et $\rho \geq 1$, il n'existe aucun algorithme d'approx. en tps polynomial de borne ρ pour le problème général du voyageur de commerce.

Preuve: par l' absurde. Supposons qu'il existe un algo. d'approx. B de borne ρ.

Construisons une instance du voyageur de commerce à partir d'une instance du problème du cycle hamiltonien.

$$\mathcal{F}(G = (V, E)) = \left\{ \begin{array}{l} G' = (V, E') \textit{ graphe complet} \\ c(u, v) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & si\ (u, v) \in A \\ 1 + \rho|V| & sinon \end{array} \right. \end{array} \right.$$

□

Suite (1/3)

1. Si G a un cycle hamiltonien, (G', c) a une tournée de coût $|V|$
2. Sinon, le coût d'1 tournée $\geq (1 + \rho|V|) + (|V| - 1) > \rho|V|$

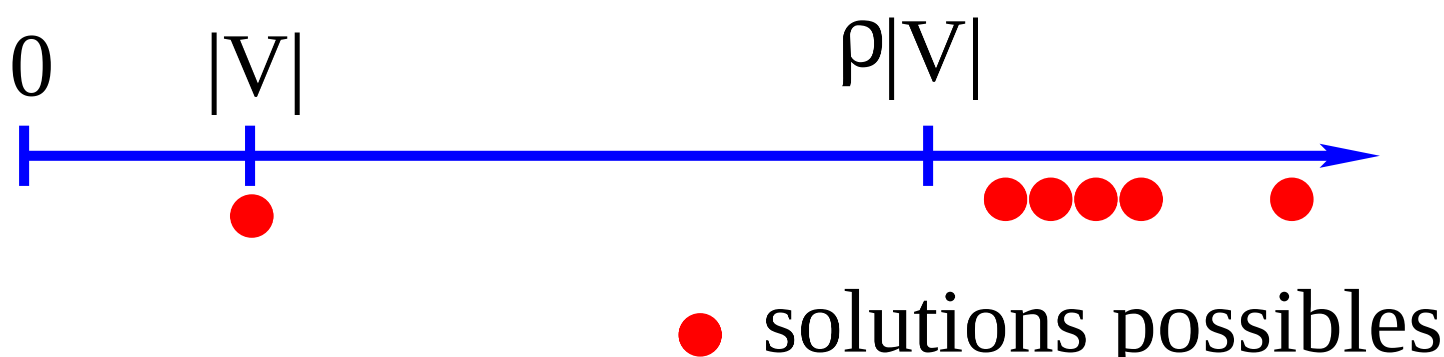
Algo. polynomial déterminant si G a un cycle hamiltonien,

1. $(G', c) := \mathcal{F}(G)$.
2. Soit H la tournée calculée par B ayant en entrée (G', c)
3. retourner $\begin{cases} vrai & si\ c(H) \leq \rho|V| \\ faux & sinon\ (c(H) > \rho|V|) \end{cases}$

Suite (2/3)

Algo. polynomial déterminant si G a un cycle hamiltonien,

1. $(G', c) := \mathcal{F}(G)$.
2. Soit H la tournée calculée par B ayant en entrée (G', c)
3. retourner $\begin{cases} vrai & si\ c(H) \leq \rho|V| \\ faux & sinon\ (c(H) > \rho|V|) \end{cases}$



Suite (3/3): Remarque

1. Si $c(H) \leq \rho|V|$, cela signifie que $c(H^*) \leq |V| = |V|$,

   H^* est un cycle hamiltonien

2. Si $c(H) > \rho|V|$, cela signifie que $c(H^*) > |V|$,

   H^* est un cycle non-hamiltonien