Apprentissage d'équilibre de Nash pour l'ordonnancement de tâches

Johanne Cohen

PRiSM/CNRS, Versailles, France.

Travail commun avec D. Barth, O. Bournez et O. Boussaton

Allocation de tâches

- m machines
- n tâches ayant pour poids $\{w_1, \ldots, w_n\}$

- S_i : ensemble des machines pouvant héberger la tâche i

ensemble de stratégies

- Charge L_j de j = somme des poids des tâches sur j .

Allocation de tâches

- m machines ayant des vitesses d'exécution $f_1(.), \ldots, f_m(.)$
- n tâches ayant pour poids $\{w_1, \ldots, w_n\}$

- S_i : ensemble des machines pouvant héberger la tâche i

ensemble de stratégies

- Charge L_j de j = somme des poids des tâches sur j .

Allocation de tâches

- m machines ayant des vitesses d'exécution $f_1(.), \ldots, f_m(.)$
- n tâches ayant pour poids $\{w_1, \ldots, w_n\}$

ensemble de joueurs

- S_i : ensemble des machines pouvant héberger la tâche i

ensemble de stratégies

- Charge L_j de j = somme des poids des tâches sur j .
- Coût d'une tâche i : $c_i(M) = f_j(L_j)$

  dans la configuration M, le joueur i choisit d'être placé sur j.

Quelques cas particuliers

Cas où les machines sont des

- *machines identiques* :

$$f_j(L) = L$$

- *machines uniformément reliées* :

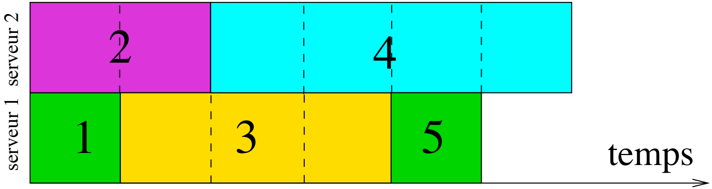
$$f_j(L) = a_j L + b_j$$

- *machines ayant aucune contrainte* :

$$f_j(.) \text{ quelconque}$$

Exemple : allocation de tâches

- 2 machines, 5 tâches,
- Une affectation $L_1 = 5$, $L_1 = 6$



- Coût (machines identiques) :

tâche	coût
1	5
3	5
5	5

tâche	coût
2	6
4	6

- Une tâche peut-elle améliorer son utilité ? NON

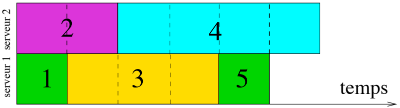
Equilibre de Nash (en stratégies pures)

Stratégie pure pour un joueur i : choix d'un machine j.

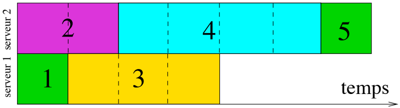
Une affectation de n tâches est un équilibre de Nash si pour toutes les tâches i,

Si i est affecté à la machine j, et
si i peut être affecté à la machine k alors,

$$f_j(L_i) \leq f_k(L_k + w_i)$$



Equilibre de Nash



$\neg$ Equilibre de Nash

Equilibre de Nash (en stratégies mixte)

Stratégie mixte pour un joueur i : choix d'une distribution de probabilité q_i sur les machines.

Une affectation de n tâches est un équilibre de Nash si pour toutes les tâches i,

Si i est affecté aux machines selon la distribution q_i, et pour tout autre distribution q'_i pour i alors,

$$E_{q_i,q_{-i}}[f(L)] \leq E_{q'_i,q_{-i}}[f(L)]$$

Théorème [Nash 51]

Tout jeu possède un équilibre en stratégies mixtes

Plan de l'exposé

Ordonnancement de tâches

Résultats connus

Dynamique

Version stochastique

Autre dynamique

- Etape 1
- Etape 2
- Etape 3

Conclusion

1. Résultats connus

Existence d'un équilibre de Nash.

Théorème [Fotakis2002,Even-Dar2003]

Les jeux de cet exposé possèdent toujours un équilibre de Nash en stratégies pures.

Existence d'un équilibre de Nash.

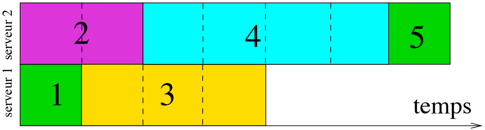
Théorème [Fotakis2002,Even-Dar2003]

Les jeux de cet exposé possèdent toujours un équilibre de Nash en stratégies pures.

Preuve :

1. Soit M une affectation et $\{(f_j(L_j))_j\}$ les tps de réponses.
2. $\overline{v}(M) = \{f_1(L_1), f_2(L_2), \ldots, f_m(L_m)\}$ avec

$$f_1(L_1) \geq f_2(L_2) \geq \cdots \geq f_m(L_m)$$



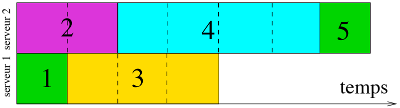
$$\begin{array}{lcl} (f_1(L_1))_1 & = & 7 \\ (f_1(L_1))_2 & \rightarrow & 4 \\ \overline{v}(M) & \rightarrow & (7{,}4) \end{array}$$

Suite de la preuve (1/2)

Remarque :

Si la tâche i veut migrer du machine j vers k, alors on est dans la situation

- $f_j(L_j) \searrow$ et $f_k(L_k) \nearrow$
- $j < k$.
- $\overline{v}(M) > \overline{v}(M')$ avec $M' = M \oplus$ la tâche i est sur le machine k.



M

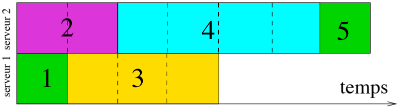
$\overline{v}(M) = (7, 4)$

Suite de la preuve (1/2)

Remarque :

Si la tâche i veut migrer du machine j vers k, alors on est dans la situation

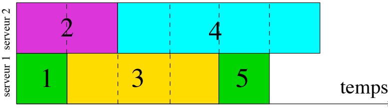
- $f_j(L_j) \searrow$ et $f_k(L_k) \nearrow$
- $j < k$.
- $\overline{v}(M) > \overline{v}(M')$ avec $M' = M \oplus$ la tâche i est sur le machine k.



M

$\overline{v}(M) = (7, 4)$

$\longrightarrow$



M_1

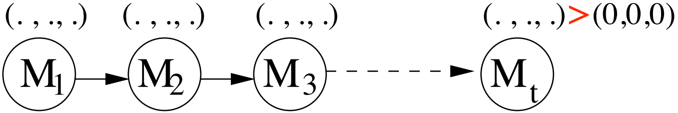
$\overline{v}(M_1) = (6, 5)$

La tâche 5 migre.

Suite la preuve (2/2)

Algorithme :

1. Soit M une affectation, $f_1(L_1) \geq f_2(L_2) \geq \cdots \geq f_m(L_m)$
2. $t \leftarrow 1$ et $M_0 \leftarrow M$
3. Tant qu'$\exists$ une tâche j qui veut migrer de i vers k dans M_t, faire
   3.1 $M_{t+1} \leftarrow M_t \oplus$ déplacement de j de i vers k
   3.2 $t \leftarrow t + 1$
4. M_t est un équilibre de Nash.



Travaux sur ce jeu

- Existence d'un équilibre de Nash pur sur le jeu d'allocation
- Calcul polynomial d'un équilibre de Nash pur (Algorithme de LPT) [Fotakis et al.2002]
- Étude d'un coût social grâce au prix de l'anarchie

$$\text{Prix de l'anarchie} = \max_{Equilibre\ de\ Nash\ E} \frac{Cout(E)}{OPT}$$

	Machines Identiques	Unif. Reliées
Pur	$2 - \frac{1}{m}$	$\Theta\left(\frac{\log m}{\log\log m}\right)$
Mixte	$\Theta\left(\frac{\log m}{\log\log m}\right)$	$\Theta\left(\frac{\log m}{\log\log\log m}\right)$

- 1999 : Koutsoupias & Papadimitriou
- 2001 : Mavronicolas & Sirakis
- 2002 : Czumaj & Vöcking

2. Dynamiques du jeu

Principes

- n joueurs, avec un nombre fini de stratégies.

- Le jeu est répété :

  A chaque top t , les joueurs choisissent leurs stratégies.

- Le système peut-il converger vers un équilibre de Nash ?

  On cherche à “apprendre” les équilibres de Nash.

Problème à résoudre

- $q_i(t)$: stratégie employée par joueur i au temps t.

- Algorithme d'apprentissage :
$q_i(t+1) = Fonction - ou - Algorithme(\{q_j(t')\}_{j \text{ joueur}, t' \leq t})$

- Le problème : Déterminer un algorithme d'apprentissage tel que, pour tout i,

$$\text{lorsque } t \to \infty, \qquad q_i(t) \to q_i^*$$

où $(q_1^*, \cdots, q_N^*)$ est un N.E

Variantes

- Quels équilibres de Nash ?
  - Equilibre de Nash particulier / Equilibres de Nash purs / Equilibres de Nash mixtes

- Qu'est ce qu'un algorithme ?
  - Algorithme Centralisé/Distribué ?

- Jeu à information complète/incomplète :
  - quelles sont les connaissances des joueurs ?

3. Une première dynamique

Première dynamique

Théorème [Even-Dar et al 2003]

La dynamique suivante :

- chaque joueur joue l'un à près l'autre ;
- chaque joueur *i*, lorsque c'est son tour, migre sa tâche vers la machine de charge minimale, s'il améliore son coût.

atteint ultimement un équilibre de Nash pur.

Preuve inspirée de l'existence d'un équilibre de Nash.

- Un état est définit par un vecteur et par une norme
- Chaque déplacement permet de décroitre la norme du nouveau état.

Première dynamique

Théorème [Even-Dar et al 2003]

La dynamique suivante :

- chaque joueur joue l'un à près l'autre ;
- chaque joueur i, lorsque c'est son tour, migre sa tâche vers la machine de charge minimale, s'il améliore son coût.

atteint ultimement un équilibre de Nash pur.

Preuve inspirée de l'existence d'un équilibre de Nash.

- Un état est définit par un vecteur et par une norme
- Chaque déplacement permet de décroitre la norme du nouveau état.

Extentions de ces résultats [Even-Dar et al 2003]

Extention du précédent résultat

1. au modèle “machines identiques”, “unif. reliées”, “général”.
2. la sélection de joueurs peut se réaliser en fonction de différents critères comme l’ordre FIFO, un ordre sur les longueurs des tâches, sur la charge des machines...

Résultats :

- Convergence vers un équilibre de Nash pur.
- Borne sur le nombre de d’étapes pour l’atteindre.

4. Une version stochastique

Dynamique stochastique de [Berenbrink et al 2006]

Faire en parallèle pour chaque tâche (unitaire) i

1. Soit j la machine hébergeant i
2. Choisir aléatoirement uniformément une machine ℓ
3. si $L_\ell(t) < L_j(t)$ alors
   3.1 migrer la tâche i de j vers ℓ avec une probabilité $1 - \frac{L_j(t)}{L_\ell(t)}$

En utilisant cette politique, le système atteint un ϵ-équilibre de Nash en un temps espéré de $O(\log\log n) + m^4)$ $(n >> m)$.

Dynamique stochastique de [Berenbrink et al 2006]

Faire en parallèle pour chaque tâche (unitaire) i

1. Soit j la machine hébergeant i
2. Choisir aléatoirement uniformément une machine ℓ
3. si $L_\ell(t) < L_j(t)$ alors
   3.1 migrer la tâche i de j vers ℓ avec une probabilité $1 - \frac{L_j(t)}{L_\ell(t)}$

En utilisant cette politique, le système atteint un ϵ-équilibre de Nash en un temps espéré de $O(\log \log n) + m^4)$ $(n >> m)$.

5. Autre dynamique :

convergence vers des équilibres mixtes

Algorithme LRI [Sastry et al. 94]

$q_i(t) = [q_{i,1}(t), \cdots, q_{i,m_i}(t)]$: vecteur de distribution de probabilité sur S_i au temps t.

Algorithme (LRI= Linear Reward Inaction) [Sastry et al. 94]

- $q_i(0)$ vecteurs quelconques, pour tout i.
- Faire en parallèle pour chaque tâche i
  1. Choisir une machine $j = a_i$ selon stratégie mixte $q_i(t)$.
  2. On obtient un profit $r_i(t) = 1 - c_i(t)$.
  3. Mettre à jour $q_i(t)$ selon

$$q_i(t+1) = q_i(t) + br_i(t)(e_{a_i} - q_i(t))$$

avec b paramètre.

Exemple de cette dynamique

- 2 machines,
- 5 tâches $\{w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 3, w_4 = 4, w_5 = 1\}$

Exemple de cette dynamique

- 2 machines,
- 5 tâches $\{w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 3, w_4 = 4, w_5 = 1\}$

Au top t,

$$q_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Exemple de cette dynamique

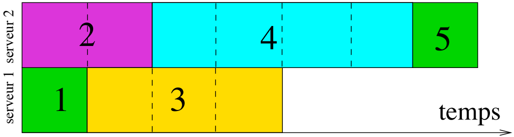
- 2 machines,
- 5 tâches $\{w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 3, w_4 = 4, w_5 = 1\}$

Au top t,

$$q_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Au top $t+1$,

$$a_1 = 1$$



Exemple de cette dynamique

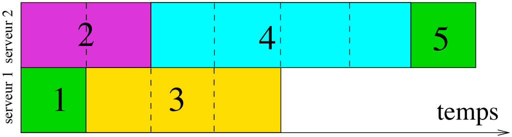
- 2 machines,
- 5 tâches $\{w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 3, w_4 = 4, w_5 = 1\}$

Au top t,

$$q_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Au top $t+1$,

$$a_1 = 1$$
$$c_1 = 4/11$$
$$r_1 = 7/11$$



Exemple de cette dynamique

- 2 machines,
- 5 tâches $\{w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 3, w_4 = 4, w_5 = 1\}$

Au top t,

$$q_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Au top $t + 1$,

$a_1 = 1$

$c_1 = 4/11$

$r_1 = 7/11$

$$q_1(t+1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + br_1(1 - \frac{2}{3}) \\ \\ \frac{1}{3} + br_1(0 - \frac{2}{3}) \end{pmatrix}$$

$b = 0.1$

Exemple de cette dynamique

- 2 machines,
- 5 tâches $\{w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 3, w_4 = 4, w_5 = 1\}$

Au top t,

$$q_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Au top $t+1$,

$$q_1(t+1) \approx \begin{pmatrix} 0,68 \\ \\ 0,32 \end{pmatrix}$$

Etude de cette dynamique

3 étapes.

- Etape 1 : De discret vers continu.
- Etape 2 : Analyse du système continu.
- Etape 3 : Convergence du système continu.

- $Q(t) = (q_1(t), \cdots, q_n(t)) \in K$.

$$K = \left\{ \begin{array}{l} Q \in [0,1]^{m_1 + \cdots + m_n} | Q = (q_1, \cdots, q_n), \\ q_i \text{ vecteur de probabilité de dimension } m_i \end{array} \right\}$$

- Dynamique de la forme :

$$Q(t+1) = Q(t) + bG(Q(t), a(t), c(t)).$$

où

- $a(t) = (a_1(t), \cdots, a_n(t))$ machines choisies au temps t.
- $c(t) = (c_1(t), \cdots, c_n(t))$ coûts correspondants.
- $G(.)$ la dynamique donnée par l'équation de mise à jour précédente.

Théorème 1 [Sastry et al. 94].

- On étend $Q : \mathbb{N} \to K$ en $Q^b : \mathbb{R} \to K$, par

$$Q^b(t) = Q(k), t \in [kb, (k+1)b[.$$

- On s'intéresse à la limite de $Q^b(.)$, lorsque $b \to 0$.

- Posons $g(Q) = E[G(Q(t), a(t), c(t)) | Q(t) = Q]$.

Définition : une suite Q_n de mesures converge faiblement vers Q, si $E[f(Q_n)] \to E[f(Q)]$ pour toute fonction $f(.)$ continue et bornée.

Théorème 1 [Sastry et al. 94].

Théorème [Théorème 1. de [Sastry et al. 94]]

Soit $X_0 = Q^b(0) = Q(0)$. La suite $Q^b(.)$ converge faiblement lorsque $b \to 0$ vers $X(.)$ solution de l'équation différentielle

$$\frac{dX}{dt} = g(X), \qquad X(0) = X_0.$$

- Preuve : Théorème 3.2 de Kushner, "Approximation and Weak Convergence Methods for Random Processes, with Applications to Stochastic Systems Theory".

Théorème 1 [Sastry et al. 94].

Théorème [Théorème 1. de [Sastry et al. 94]]

Soit $X_0 = Q^b(0) = Q(0)$. La suite $Q^b(.)$ converge faiblement lorsque $b \to 0$ vers $X(.)$ solution de l'équation différentielle

$$\frac{dX}{dt} = g(X), \qquad X(0) = X_0.$$

- Preuve : Théorème 3.2 de Kushner, "Approximation and Weak Convergence Methods for Random Processes, with Applications to Stochastic Systems Theory".

L'étude de la limite de la dynamique se ramène à l'étude de l'équation différentielle.

Etape 2 : Etude du système continu

Etude de l'équation différentielle

Théorème [Théorème 1. de [Sastry et al. 94]]

Soit $X_0 = Q^b(0) = Q(0)$. La suite $Q^b(.)$ converge faiblement lorsque $b \to 0$ vers $X(.)$ solution de l'équation différentielle

$$\frac{dX}{dt} = g(X), \qquad X(0) = X_0.$$

Par conséquence : Composante par composante

$\frac{dq_{i,\ell}}{dt} = g(Q)_{i,\ell}$ avec

$$g(Q) = E[G(Q(t), a(t), c(t)) | Q(t) = Q]$$

$$G(Q(t), a(t), c(t)) = (1 - c(t))(a(t) - Q(t))$$

Etude de l'équation différentielle

- Composante par composante, l'équation différentielle est

$$\frac{dq_{i,\ell}}{dt} = -q_{i,\ell}[h_{i,\ell}(Q) - \overline{h_i}(Q)], \qquad 1 \leq \ell \leq m_i, 1 \leq i \leq n$$

- avec

$$\overline{h_i}(Q) = \textstyle\sum_s q_{i,s} h_{i,s}(Q)$$

$$h_{i,\ell}(Q) = E\left[\mathbf{c_i} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \leq j \leq n, j \neq i \text{ utilise stratégie } q_j \\ \text{et } i \text{ utilise la stratégie } \ell \end{array} \right]$$

- I.e. : une dynamique de réplication

utilisée dans la théorie évolutionnaire des jeux.

- modélisation de l'évolution de population (en biologie)
- $x_i(t)$ proportion d'individus jouant la stratégie i au temps t.
- $\frac{dx_i}{dt} = x_i[h_i(e_i, X) - \overline{h_i}(X)], \qquad , 1 \leq i \leq n$
- $h_i(e_i, X)$ nombre moyen de remplacements pour un individu jouant i

Dynamique de réplication : $\frac{dq_{i,\ell}}{dt} = -q_{i,\ell}[h_{i,\ell}(Q) - \overline{h_i}(Q)]$

Théorème [Folk Theorem]

- Les coins de K sont stationnaires.
- Les équilibres de Nash sont stationnaires.
- Tous les points stationnaires qui ne sont pas des équilibres de Nash sont instables.
- Tous les coins de K qui sont des équilibres de Nash stricts (en stratégies pures) sont asymptotiquement stables.

En clair

Cela signifie :

1. peut-être qu'on converge, peut-être pas ...(dans le cas général)
2. si l'on converge, on converge vers un N.E.
3. N.E. pur + strict implique localement asymptotiquement stable.

En clair

Cela signifie :

1. peut-être qu'on converge, peut-être pas ...(dans le cas général)
2. si l'on converge, on converge vers un N.E.
3. N.E. pur + strict implique localement asymptotiquement stable.

En clair

Cela signifie :

1. peut-être qu'on converge, peut-être pas . . .(dans le cas général)
2. si l'on converge, on converge vers un N.E.
3. N.E. pur + strict implique localement asymptotiquement stable.

En clair

Cela signifie :

1. peut-être qu'on converge, peut-être pas . . .(dans le cas général)
2. si l'on converge, on converge vers un N.E.
3. N.E. pur + strict implique localement asymptotiquement stable.

Etape 3 : Garantir la convergence

Garantir la convergence

Théorème [extension de [Sastry et al 94]]

Soit $F : K \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable positive ou nulle telle que pour des constantes $w_i > 0$,

$$\forall Q, \forall i, \forall \ell,\ \frac{\partial F}{\partial q_{i,\ell}}(Q) = w_i \times h_{i,\ell}(Q) \tag{1}$$

Alors, il y a convergence vers un N.E.

Preuve :

$$\frac{d}{dt}F(Q(t)) \leq 0$$

Pourquoi ?

Garantir la convergence

Théorème [extension de [Sastry et al 94]]

Soit $F : K \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable positive ou nulle telle que pour des constantes $w_i > 0$,

$$\forall Q, \forall i, \forall \ell, \ \frac{\partial F}{\partial q_{i,\ell}}(Q) = w_i \times h_{i,\ell}(Q) \tag{1}$$

Alors, il y a convergence vers un N.E.

Preuve :

$$\frac{d}{dt} F(Q(t)) \leq 0$$

Pourquoi ?

Fonction magique, dans le cas $f_j(L) = a_j L + b_j$

La fonction

$$F(Q) = \sum_{k=1}^{m} \left[b_k \sum_{j=1}^{N} q_{j,k} w_j + \frac{a_k}{2} (\sum_{j=1}^{N} q_{j,k} w_j)^2 + a_k \sum_{j=1}^{N} q_{j,k} w_j^2 (1 - \frac{q_{j,k}}{2}) \right]$$

vérifie $\frac{\partial F}{\partial q_{i,\ell}}(Q) = w_i \times h_{i,\ell}(Q)$

Corollary

Il y a convergence vers un N.E. dans ce cas

Fonction magique, dans le cas $f_j(L) = a_j L + b_j$

La fonction

$$F(Q) = \sum_{k=1}^{m} \left[b_k \sum_{j=1}^{N} q_{j,k} w_j + \frac{a_k}{2} (\sum_{j=1}^{N} q_{j,k} w_j)^2 + a_k \sum_{j=1}^{N} q_{j,k} w_j^2 (1 - \frac{q_{j,k}}{2}) \right]$$

vérifie $\frac{\partial F}{\partial q_{i,\ell}}(Q) = w_i \times h_{i,\ell}(Q)$

Corollary

Il y a convergence vers un N.E. dans ce cas

Résumé

1. La dynamique converge (faiblement) vers la solution d'une dynamique de réplication
2. La dynamique de réplication converge
3. Les limites ne peuvent être que des N.E.

4. La dynamique apprend donc bien les N.E.

Résumé

1. La dynamique converge (faiblement) vers la solution d'une dynamique de réplication
2. La dynamique de réplication converge
3. Les limites ne peuvent être que des N.E.

4. La dynamique apprend donc bien les N.E.

Résumé

1. La dynamique converge (faiblement) vers la solution d'une dynamique de réplication
2. La dynamique de réplication converge
3. Les limites ne peuvent être que des N.E.

4. La dynamique apprend donc bien les N.E.

Résumé

1. La dynamique converge (faiblement) vers la solution d'une dynamique de réplication
2. La dynamique de réplication converge
3. Les limites ne peuvent être que des N.E.

4. La dynamique apprend donc bien les N.E.

Résumé

1. La dynamique converge (faiblement) vers la solution d'une dynamique de réplication
2. La dynamique de réplication converge
3. Les limites ne peuvent être que des N.E.

4. La dynamique apprend donc bien les N.E.

Travaux en cours : ce problème

- Fidélité de la dynamique continue par rapport à la dynamique discrète :
  - borne sur l'erreur au temps t
- Temps de convergence :
  - Etant donné ϵ, quel temps faut-il pour atteindre un ϵ-équilibre de Nash ?
- Extension au cas général :
  - Existe t'-il une fonction de Liapunov F dans le cas général ?
  - Autre argument qu'un argument via une fonction de Liapunov ?

Extensions

- Résultats de convergence pour d'autres problèmes ?
  - Problème d'ordonnancement avec différentes fonctions de coût.
  - Problème du routage entre noeuds (Jeux de congestion)

- D'autres dynamiques ?
  - dynamique stochastique ?
  - autres algorithmes d'apprentissage ?

Dérivée de $F(Q(t))$: Première considération

Lemma

$$\sum_{\ell} \sum_{s} q_{i,\ell} q_{i,s} h_{i,\ell} h_{i,s} = (\sum_{\ell} q_{i,\ell} h_{i,\ell})^2$$

Dérivée de $F(Q(t))$: Calculons

$$\begin{aligned}
\frac{dF(Q(t))}{dt} &= \sum_{i,\ell} \frac{\partial F}{\partial q_{i,\ell}} \frac{dq_{i,\ell}}{dt} \\
&= -\sum_{i,\ell} \frac{\partial F}{\partial q_{i,\ell}}(Q) q_{i,\ell} \sum_s q_{i,s}[h_{i,\ell}(Q) - h_{i,s}(Q)] \\
&= -\sum_{i,\ell} w_i h_{i,\ell}(Q) q_{i,\ell} \sum_s q_{i,s}[h_{i,\ell}(Q) - h_{i,s}(Q)] \\
&= -\sum_i w_i \sum_\ell \sum_s q_{i,\ell} q_{i,s}[h_{i,\ell}(Q)^2 - h_{i,\ell}(Q) h_{i,s}(Q)] \\
&= -\sum_i w_i [\sum_\ell q_{i,\ell} (\sum_s q_{i,s}) h_{i,\ell}(Q)^2 - (\sum_\ell q_{i,\ell} h_{i,\ell})^2] \\
&= -\sum_i w_i [\sum_\ell q_{i,\ell} h_{i,\ell}(Q)^2 - (\sum_\ell q_{i,\ell} h_{i,\ell})^2] \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

by Jensen's Lemma.

back

- Dynamique de la forme :

$$Q(t+1) = Q(t) + bG(Q(t), a(t)).$$

où

  - $a(t) = (a_1(t), \cdots, a_n(t))$ machines choisies au temps t.
  - $c(t) = (c_1(t), \cdots, c_n(t))$ coûts correspondants.
  - $G(.)$ la dynamique donnée par l'équation de mise à jour précédente.

- Donc

$$\begin{array}{rcl} E[Q(n)] & = & E[Q(0)] + \sum_{t=1}^{n} E[Q(t+1) - Q(t)] \\ & = & Q(0) + \sum_{t=1}^{n} bE[G(Q(t), a(t))] \\ & = & Q(0) + \sum_{t=1}^{n} bg(Q(t)) \end{array}$$

où $g(Q(t)) = E[G(Q(t), a(t))]$

(le choix de $a(t)$ est fait selon $Q(t)$)

- Considérons la fonction $X(t)$ solution du problème de Cauchy $X(0) = Q(0) = Q^b(0)$, $\frac{dX}{dt} = g(X(t))$.
- Posons $\epsilon(t) = ||E[Q^b(t)] - X(t)||$
- Supposons $g(.)$ Λ-lispchitienne : $||g(x) - g(x')|| \leq \Lambda ||x - x'||$
- $$\begin{array}{rcl} \epsilon((n+1)b) & = & ||bg(Q^b(nb)) + Q^b(nb) \\ & & - \int_{nb}^{(n+1)b} g(X(t'))dt' - X(nb)|| \\ & \leq & \epsilon(nb) + b||g(Q^b(nb)) - g(X(nb))|| \\ & & + ||bg(X(nb)) - \int_{nb}^{(n+1)b} g(X(t'))dt'|| \\ \epsilon((n+1)b) & \leq & (1 + \Lambda b)\epsilon(nb) + e(nb) \end{array}$$

  avec $e(nb) = || \int_{nb}^{(n+1)b} g(X(t'))dt' - bg(X(nb)) \leq M\frac{b^2}{2}$ avec $M = \sup_t g^{(2)}(t) = \sup_t \frac{dg(X(t))}{dt}$.

- Lemme de Gronwall ...

$$
\begin{aligned}
\epsilon(nb) &\leq e^{\Lambda nb}\epsilon(0) + M\frac{b^2}{2}\frac{(1+\Lambda b)^n - 1}{\Lambda b} \\
&\leq M\frac{b^2}{2}\frac{e^{\Lambda nb}-1}{\Lambda b}
\end{aligned}
$$

  puisque $\epsilon(0) = 0$ et $(1+u)^n \leq e^{nu}$, avec

- Sur notre dynamique ...

- $$\epsilon(t) \leq b\Lambda(e^{\Lambda t} - 1)$$

  avec $\Lambda = 2(nAW + B)$, $A = \max_j \alpha_j$, $W = \max_j w_j$, $B = \max_j \beta_j$.

  Retour