

Chapitre 5

Jeux classiques en théorie algorithmique des jeux

Ce chapitre vise à présenter et rappeler quelques jeux classiques de la théorie algorithmique des jeux tout en introduisant les concepts de base de la théorie des jeux. Ce chapitre n'est toutefois pas une liste exhaustive des jeux étudiés en informatique. Afin d'obtenir plus d'information, le lecteur peut se référer au livre [Nisan et al., 2007].

Le chapitre s'organise de la façon suivante. Dans la section 5.1, nous allons introduire la notion d'équilibre de Nash (mixte) en discutant la complexité du problème de leur calcul. Ensuite, nous allons instancier sur des jeux simples, comme les jeux symétriques, et puis sur les jeux de potentiel ordinal (avec leurs différentes variantes). Finalement, comme ces classes de jeux possèdent plusieurs équilibres, nous allons discuter quels sont les différents critères pour les évaluer.

Ce chapitre est essentiellement un rapide survol. Nous présentons cependant une contribution personnelle (obtenue en collaboration avec Fanny Pascual) concernant l'existence d'équilibres de Nash purs et d' ϵ -équilibres de Nash purs dans les jeux d'allocation de tâches, lorsqu'un joueur est responsable de plusieurs tâches [43].

5.1 Jeux statiques (non-répétés)

Cette section se consacre aux jeux où n joueurs sont en concurrence. Dans le chapitre 2, section 2.5, les notions de base sur la théorie des jeux ont été introduites comme la notion de joueur, de stratégie pure. Nous allons aussi fixer les notations que l'on conservera dans la suite du document.

L'ensemble des joueurs sera noté par la suite $[n] = \{1, \dots, n\}$. Chaque joueur i a un ensemble $\mathcal{S}_i$ de stratégies pures. Soit m_i la cardinalité de $\mathcal{S}_i$.

Définition 19 (stratégie mixte) Une stratégie mixte $q_i = (q_{i,1}, q_{i,2}, \dots, q_{i,m_i})$ correspond à un vecteur de probabilité sur les stratégies pures : la stratégie pure ℓ est choisie avec la probabilité $q_{i,\ell} \in [0, 1]$, avec $\sum_{\ell=1}^{m_i} q_{i,\ell} = 1$.

L'espace des stratégies mixtes du joueur i correspond à un simplexe que nous noterons $\mathcal{K}_i$. Soit $\mathcal{K} = \prod_{i=1}^n \mathcal{K}_i$ l'espace des stratégies mixtes.

Observons que n'importe quelle stratégie pure ℓ peut être considérée comme une stratégie mixte e_ℓ telle que le vecteur e_ℓ est celui constitué uniquement de zéro à l'ex-

ception de son ℓ ème élément étant à 1. Cela signifie aussi que e_ℓ est un coin du simplexe $\mathcal{K}_i$.

Définition 20 (profil de stratégies mixtes) Un profil de stratégies mixtes $Q = (q_1, \dots, q_n)$ est un élément de $\mathcal{K}$ qui spécifie les stratégies (pure ou mixtes) de tous les joueurs : le vecteur de probabilité q_i correspond à la stratégie mixte utilisée par le joueur i .

En suivant les conventions classiques de la théorie des jeux, de façon abusive, nous écrirons Q_{-i} , le profil Q privé de la stratégie du joueur i : $Q_{-i} = (q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n)$ correspond au vecteur de stratégies de tous les joueurs sauf du joueur i .

Les jeux peuvent avoir des coûts aléatoires : sachant un profil des stratégies $Q \in \mathcal{K}$, le coût de chaque joueur i est la valeur espérée du coût. En particulier, le coût espéré par le joueur i jouant la stratégie pure e_ℓ est notée $c_i(e_\ell, Q_{-i})$.

5.1.1 Meilleure réponse

La stratégie x du joueur i par rapport au profil Q est une *meilleure réponse*, si $c_i(x, Q_{-i}) \leq c_i(q_i, Q_{-i})$ pour tout $q_i \in \mathcal{K}_i$. L'ensemble (compact, convexe, non vide) de toutes les meilleures réponses du joueur i par rapport à Q_{-i} (ensemble des stratégies des autres joueurs) est notée $BR_i(Q_{-i})$.

Par exemple, considérons le jeu dont les coûts sont représentés par la table 5.1 (c'est le même que celui pris en exemple dans le chapitre 2, pages 13 et 19).

		joueur 2				joueur 1	
		s_1	s_2			s_1	s_2
joueur 1	s_1	2	0	joueur 2	s_1	2	0
	s_2	1	1		s_2	1	1
Coût du joueur 1				Coût du joueur 2			

TAB. 5.1 – Coûts du jeu décrit à la page 19

Sans perte de généralité, supposons que p soit un réel compris entre 0 et 1 et que le joueur 2 joue la stratégie mixte $(1 - p, p)$, c'est-à-dire qu'il jouera la stratégie s_1 avec la probabilité $1 - p$, et la stratégie s_2 avec la probabilité p . Alors pour le joueur 1, le coût espéré du joueur 1 est égal à 1 s'il joue la stratégie pure s_2 c'est-à-dire $c_1(s_2, (1 - p, p)) = 1$. Sinon il est à $2 - 2p$. Alors, si $\frac{1}{2} < p$, il est préférable qu'il joue la stratégie pure s_1 plutôt que s_2 . Que se passe-t-il lorsque $p = 1/2$? Les deux stratégies sont des meilleures réponses. De plus, toute stratégie mixte est une meilleure réponse par rapport la stratégie mixte $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ du joueur 2. Récapitulons

$$BR_1((1 - p, p)) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si } 1 \geq p > \frac{1}{2} \\ \mathcal{K}_1 & \text{si } p = \frac{1}{2} \\ (0, 1) & \text{si } \frac{1}{2} > p \geq 0 \end{cases}$$

Une stratégie mixte est caractérisée par l'ensemble des stratégies pures à laquelle elle attribue une probabilité strictement positive. Cet ensemble s'appelle le *support*. Par exemple, toutes les stratégies pures sont des stratégies mixtes de support réduit à un singleton. De plus,

Propriété 1 *Une stratégie mixte est une meilleure réponse par rapport à un ensemble de stratégies Q si et seulement si toutes les stratégies de son support sont aussi des meilleures réponses par rapport à Q .*

En fait, considérons une stratégie mixte ayant un support contenant au moins deux éléments ℓ et t . Si une stratégie pure ℓ de son support a un coût plus élevé que celle t , alors il est préférable pour le joueur de choisir t à la place de ℓ lorsque la stratégie ℓ est choisie. Donc ainsi est construite une stratégie mixte ayant un coût plus petit que celle de départ.

La première étape pour modéliser un système en concurrence peut être de l'exprimer sous forme de jeu. L'étape suivante est de prédire dans quel état stable il va être.

John Nash prouvait dans [Nash, 1950] que tout jeu possède une situation d'équilibre mixte, que l'on nomme équilibre de Nash dans laquelle aucun joueur n'a intérêt unilatéralement de s'écarter. Ce concept d'équilibre de Nash pour les jeux a été un point important de la théorie de jeux.

5.1.2 Équilibre de Nash

Définition 21 ([Nash, 1950]) *Un équilibre de Nash mixte est un profil $Q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ tel que*

$$\forall i, \forall q'_i \in \mathcal{K}_i \text{ on a } c_i(q_i^*, Q_{-i}^*) \leq c_i(q'_i, Q_{-i}^*).$$

Rappelons que $\mathcal{K}_i$ correspond à l'ensemble des stratégies mixtes du joueur i .

La notion d'équilibre de Nash peut s'écrire en utilisant la notion de meilleure réponse. En effet, un profil $Q^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ est un équilibre de Nash mixte, si pour tout joueur i , on a $q_i^* \in BR_i(Q_{-i}^*)$. A partir du calcul de l'ensemble des meilleures réponses, il est facile de calculer quels sont les équilibres de Nash pour le jeu dont la forme stratégique correspond à la table 5.1 : deux équilibres de Nash purs (s_1, s_2) , (s_2, s_1) , et un équilibre de Nash pur (q, q) avec q correspondant à la stratégie mixte $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Théorème 14 ([Nash, 1950]) *Il existe un équilibre de Nash mixte dans tout jeu fini.*

Par contre, certains jeux ne possèdent pas toujours un équilibre de Nash pur : voir l'exemple 2.2 décrit à la page 14. Et même pour les jeux décrits dans le chapitre 2, décider s'il existe un équilibre de Nash est NP-complet.

Pour les équilibres mixtes, il en existe toujours un. Une question naturelle se pose. Un équilibre de Nash, est-il toujours calculable ? Les équilibres de Nash ont été introduits par l'idée de prédire vers quels états le système va converger si les acteurs sont rationnels. Discuter la complexité du calcul des équilibres de Nash est lié la pertinence de cette notion : on peut se dire que s'ils sont difficiles à calculer, il n'est pas clair que le système va nécessairement tendre vers ces états. Par exemple, dans les différents jeux, les joueurs peuvent être des machines/routeurs/capteurs/applications, il n'est pas du tout évident que de tels systèmes vont converger vers de tels équilibres.

La preuve du théorème 14 se base sur le théorème de point fixe de Brouwer qui affirme qu'une fonction continue sur $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ admet un point fixe. Cette preuve n'est pas constructive puisque trouver un point fixe de Brouwer paraît difficile [Hirsch et al., 1989] (il est au moins nécessaire d'effectuer un nombre exponentiel d'opérations).

Actuellement, l'algorithme de Lemke-Howson [Lemke and Howson, 1964] est l'algorithme combinatoire le plus efficace pour calculer les équilibres de Nash mixtes. L'idée de l'algorithme est de parcourir l'espace des profils en se basant sur les propriétés des meilleures réponses (notamment sur la propriété des supports des équilibres de Nash). A chaque itération, le support de l'état courant est modifié légèrement afin d'accéder vers un état ayant un support qui "respecte le plus" la propriété 1. Remarquons que cet algorithme ressemble beaucoup à la méthode du simplexe de la programmation linéaire puisque la modification du support est basée sur une succession d'applications d'une méthode du pivot pour résoudre des systèmes linéaires.

Du point de vue de la théorie des graphes, l'algorithme de Lemke-Howson parcourt un graphe dont chaque sommet correspond à un profil du jeu et dont chaque sommet a un degré sortant et un degré entrant qui vaut 0 ou 1. En effet, cela correspond au fait que la modification d'un support d'un profil vers un autre est déterministe. De plus, les équilibres de Nash correspondent à des puits (aucune meilleure modification du support est possible).

Remarquons que le nombre de sommets du graphe peut-être exponentiel. Un point crucial de cet algorithme est que connaître le voisinage d'un sommet se réalise en un temps polynomial. L'algorithme construit ainsi le graphe à la volée.

Par contre, il peut explorer un nombre exponentiel de sommets même pour des jeux particuliers comme les jeux symétriques à 2 joueurs [Savani and von Stengel, 2004] définis dans la section suivante.

La classe de complexité *PPAD* (en anglais *Polynomial Parity Arguments on Directed graphs*) a été introduite dans [Papadimitriou, 1994] (voir Annexe A pour une description). Cette classe correspond à construire une solution d'un problème de décision ayant que des instances positives.

Il a été prouvé que,

Théorème 15 ([Chen and Deng, 2005]) *Calculer un équilibre de Nash est PPAD-complet même si le jeu ne possède que deux joueurs.*

Résoudre un problème PPAD-complet semble compliqué : trouver un point fixe de Brouwer est PPAD-complet [Papadimitriou, 1994] et le nombre d'opérations pour trouver un point fixe de Brouwer est minoré par une exponentielle [Hirsch et al., 1989].

Maintenant, nous allons nous concentrer sur les jeux symétriques à deux joueurs.

5.1.3 Jeux à deux joueurs symétriques

Voici la définition formelle d'un jeu symétrique.

Définition 22 (Jeu symétrique) *Un jeu $J = (J, \mathcal{S}, (c_i)_{i \in J})$ est symétrique si les joueurs ont le même ensemble de stratégies pures et la même fonction de coût.*

Tout d'abord, nous intéressons aux jeux symétriques à deux joueurs $\{1, 2\}$ ayant deux stratégies pures $\{s_1, s_2\}$. Un exemple de jeu symétrique est celui de la section 2.1 (page 14) avec la table 2.1 de coût (page 19).

Nous allons classer les jeux en suivant [Weibull, 1995] en fonction de leur matrice de coût $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$. Rappelons ici, que la modélisation de la notion de préférence

correspond à une fonction de coût que les joueurs cherchent à minimiser contrairement à [Weibull, 1995] qui utilise des utilités que les joueurs cherchent à maximiser. Afin de se conformer à cette classification, les conditions d'appartenance à une catégorie sont inversées par rapport à [Weibull, 1995].

La matrice A peut se transformer en la matrice (symétrique) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ avec $a_1 = a_{1,1} - a_{2,1}$ et $a_2 = a_{2,2} - a_{1,2}$ sans modifier les relations entre les différentes stratégies. En effet, soustraire $a_{2,1}$ à la colonne 1 provoque simplement une translation des coûts des joueurs sans modifier la différence entre les coûts et sans modifier quelle(s) stratégie(s) est la meilleure réponse lorsque l'adversaire joue la première stratégie. Les mêmes arguments s'appliquent pour l'opération de soustraction de $a_{1,2}$ à la colonne 2.

Les jeux peuvent alors se classer en quatre catégories en fonction du signe de a_1 , et de a_2 :

- Catégorie *I* avec $a_1 > 0$ et $a_2 < 0$: La stratégie $\mathbf{s}_2$ domine strictement la stratégie $\mathbf{s}_1$ puisque pour tout choix de l'adversaire, la meilleure réponse est toujours la stratégie $\mathbf{s}_2$. Par conséquent, le jeu possède un équilibre pur ayant (s_2, s_2) comme profil.
- Catégorie *II* avec $a_1 < 0$ et $a_2 < 0$: aucune stratégie dominante existe. Pourtant, par calcul d'ensemble des meilleures réponses (calcul analogue à la page 40 pour l'exemple 5.1), le jeu possède deux équilibres de Nash pur évidents $((s_1, s_1)$ et $(s_2, s_2))$ et un équilibre de Nash mixte dont le profil est (q, q) avec $q = \left(\frac{a_2}{a_1+a_2}, \frac{a_1}{a_1+a_2} \right)$.
- Catégorie *III* avec $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$: même argument que pour la catégorie *II*. Le jeu possède deux équilibres de Nash pur évidents $((s_1, s_2)$ et $(s_2, s_1))$ et un équilibre de Nash mixte dont le profil est (q, q) .
- Catégorie *IV* avec $a_1 < 0$ et $a_2 > 0$: même argument que pour la catégorie *I*. Le jeu possède un équilibre pur ayant (s_1, s_1) comme profil.

Voici un récapitulatif des équilibres de Nash en fonction des catégories.

	$a_2 \geq 0$	$a_2 \leq 0$
$a_1 \leq 0$	Un équilibre de Nash pur $\{(s_1, s_1)\}$	Deux équilibres de Nash purs $\{(s_1, s_1), (s_2, s_2)\}$ et un équilibre de Nash mixte $\{(q, q)\}$
$a_1 \geq 0$	Deux équilibres de Nash purs $\{(s_1, s_2), (s_2, s_1)\}$ et un équilibre de Nash mixte $\{(q, q)\}$	Un équilibre de Nash pur $\{(s_2, s_2)\}$

TAB. 5.2 – Classification des jeux symétriques à deux joueurs en posant $q = \left(\frac{a_2}{a_1+a_2}, \frac{a_1}{a_1+a_2} \right)$.

Maintenant, nous allons discuter des jeux symétriques à deux joueurs mais en considérant $m \neq 2$ stratégies. Il est difficile de décider l'existence d'un équilibre avec certaines propriétés. En effet,

Théorème 16 ([Gilboa and Zemel, 1989]) *Étant donné un jeu à deux joueurs donné sous forme stratégique, les problèmes suivants : décider s'il existe*

- au moins deux équilibres de Nash ;
- un équilibre de Nash dans lequel un joueur possède un coût inférieur à k ;
- un équilibre de Nash dans lequel le coût total des joueurs est inférieur à k ;

- un équilibre de Nash dans lequel les supports des stratégies sont de taille inférieure à k ;
- un équilibre de Nash dans lequel un joueur a une stratégie mixte ayant un support de taille inférieure à k ;
- un équilibre de Nash dans lequel une stratégie appartient (ou pas) au support ;
- s’il existe un équilibre de Nash Pareto optimal ;

sont des problèmes NP-complets. Ils restent NP-complets même si le jeu est symétrique.

Cette preuve a été simplifiée dans [Conitzer and Sandholm, 2008] en apportant des résultats sur la non approximation :

Théorème 17 ([Conitzer and Sandholm, 2008]) *A moins que $P = NP$, il n'existe pas d'algorithme d'approximation en temps polynomial à un facteur r près qui approxime*

- le minimum des coûts des joueurs d'un équilibre de Nash,
- le coût social (respectivement coût moyen, le coût maximum des joueurs) d'un équilibre de Nash,

avec $r > 1$. Ces résultats restent valides si le jeu est symétrique.

Même compter les équilibres de Nash est #-complet [Conitzer and Sandholm, 2008].

Maintenant, nous allons décrire des classes de jeux à n joueurs ayant des propriétés sur les fonctions de coûts permettant d'assurer l'existence d'au moins un équilibre de Nash pur.

5.2 Les jeux de potentiel ordinal

Nous allons introduire une classe de jeux nommée les jeux de potentiel ordinal introduit par [Monderer and Shapley, 1996]. A ces jeux est associée une fonction qui permet de garantir l'existence d'équilibres de Nash purs.

Définition 23 (Jeu de potentiel ordinal) *Un jeu est un jeu de potentiel ordinal s'il existe une fonction ϕ définie à partir de l'espace des stratégies pures vers $\mathbb{R}$ telle que pour toutes les stratégies pures Q_{-i} , q_i , et q'_i , on a la condition suivante :*

$$c_i(q_i, Q_{-i}) - c_i(q'_i, Q_{-i}) > 0 \text{ si et seulement si } \phi(q_i, Q_{-i}) - \phi(q'_i, Q_{-i}) > 0$$

La fonction sera aussi appelée fonction de potentiel ordinal.

Par définition d'un jeu de potentiel ordinal, un profil $Q = (q_1, \dots, q_n)$ est un équilibre de Nash pur si et seulement si $\phi(q_i, Q_{-i}) - \phi(q'_i, Q_{-i}) < 0$ pour tout joueur i , pour toute stratégie pure q'_i du joueur i .

Théorème 18 ([Monderer and Shapley, 1996]) *Tout jeu de potentiel ordinal possède un équilibre de Nash.*

En effet, il suffit de considérer une suite de profils purs $Q^0, Q^1, Q^2, \dots, Q^k \dots$ telle que pour tout entier k , parmi tous les joueurs, un seul joueur i a une stratégie différente entre le profil Q^k et Q^{k+1} avec $c_i(Q^k) > c_i(Q^{k+1})$. Par conséquence, $\phi(Q^0) > \phi(Q^1) > \phi(Q^2) > \dots > \phi(Q^k) > \dots$. Comme ϕ est bornée inférieurement, puisque définie sur un espace fini,

cela implique que cette suite est finie et que le dernier élément correspond à un équilibre de Nash.

Une autre classe de jeux est obtenue en ajoutant une contrainte supplémentaire à la fonction de potentiel :

Définition 24 (Jeu de potentiel (exact)) *Un jeu est un jeu de potentiel exact (ou appelé jeu de potentiel) s'il existe une fonction ϕ définie à partir de l'espace des stratégies pures vers $\mathbb{R}$ telle que pour toutes les stratégies pures Q_{-i} , q_i , et q'_i , la fonction ϕ satisfait à la condition suivante :*

$$c_i(q_i, Q_{-i}) - c_i(q'_i, Q_{-i}) = \phi(q_i, Q_{-i}) - \phi(q'_i, Q_{-i}).$$

Un jeu de potentiel (exact) est donc un jeu de potentiel ordinal.

Le reste du chapitre décrit des exemples de ces jeux : les jeux de congestion, les jeux d'ordonnancement, et les jeux d'allocations de tâches. Dans ces jeux, les joueurs sont en concurrence sur un ensemble de ressources noté $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$. Chaque ressource $1 \leq r \leq m$ possède une fonction décroissante de coût $C_r : [n] \rightarrow \mathbb{R}$.

5.2.1 Les jeux de congestion

Les jeux de *congestion* ont été définis dans [Rosenthal, 1973] : les ressources $[m]$ correspondent aux arêtes d'un graphe et les joueurs choisissent un sous-ensemble de ces arêtes. L'espace des stratégies pures $\mathcal{S}_i$ du joueur i correspond à l'ensemble de toutes les parties de l'ensemble des ressources $[m]$ et sa cardinalité est égale à $2^{|[m]|}$. Une stratégie pure $q_i \in \mathcal{S}_i$ pour le joueur i est donc un sous-ensemble de $[m]$. Le coût du joueur i pour le profil de stratégies pures Q correspond à $c_i(Q) = \sum_{r \in q_i} C_r(\lambda_r(Q))$ où $\lambda_r(Q)$ est le nombre de q_i avec $r \in q_i$.

Théorème 19 ([Monderer and Shapley, 1996]) *Les jeux de congestion sont des jeux de potentiel exact. Tout jeu de potentiel exact est équivalent à un jeu de congestion.*

Pour prouver la première assertion, il suffit de constater que la fonction

$$\phi(Q) = \sum_{e \in [m]} \sum_{k=1}^{\lambda_e(Q)} C_e(k)$$

est une fonction de potentiel.

On peut constater que tous les équilibres de Nash purs dans les jeux de congestion ne sont pas forcément des minimums locaux de la fonction de potentiel. En effet, il suffit de considérer l'exemple suivant. Le jeu est composé de deux joueurs ayant deux stratégies pures et ayant trois ressources $\{1, 2, 3\}$. Le joueur 1 a deux stratégies pures $\{1\}$ et $\{2\}$ et le joueur 2 a $\{1\}$ et $\{2, 3\}$ comme stratégies pures. Le coût des ressources est le suivant : $C_1(x) = C_2(x) = x$ et $C_3(x) = 2$.

La table 5.3 représente la forme stratégique de ce jeu. Par calcul, il est facile de voir qu'il existe deux équilibres de Nash purs ayant $(\{2\}, \{1\})$ et $(\{1\}, \{2, 3\})$ comme profil et un équilibre mixte tel que le joueur 1 (resp. 2) a $(2/3, 1/3)$ (resp. $(1/2, 1/2)$) comme stratégie mixte. L'équilibre de Nash pur $(\{1\}, \{2, 3\})$ n'est pas un minimum local de ϕ (voir la table 5.4 représentant les valeurs de ϕ).

		joueur 2	
		{1}	{2, 3}
joueur 1	{1}	(2,2)	(1,3)
	{2}	(1,1)	(2,4)

TAB. 5.3 – forme stratégique du jeu

		joueur 2	
		{1}	{2, 3}
joueur 1	{1}	3	4
	{2}	2	4

 TAB. 5.4 – Valeur de ϕ du jeu de la table 5.3

Ces jeux ont été étudiés dans le cadre du routage : les joueurs veulent réserver un chemin entre deux sommets du réseau. Dans ce cadre le problème de calculer un équilibre de Nash pur est PLS-complet [Fabrikant et al., 2004]. La classe PLS définie dans [Johnson et al., 1988] est une classe correspondant à trouver des minimums locaux de fonctions sachant qu'il en n'existe un avec des contraintes supplémentaires. Voir l'annexe A pour une définition plus formelle.

Par contre, lorsque les joueurs ont même source et destination, trouver un équilibre de Nash revient à trouver un flot entier maximal de coût minimum dans un graphe. Dans ce cas, déterminer un tel équilibre est polynomial [Fabrikant et al., 2004].

Une extension de ce jeu est de considérer que les joueurs doivent transiter une quantité d'information d'un point à un autre. Alors, un poids w_i est associé à chaque joueur i et dans ce cadre la fonction $\lambda_r(Q)$ est défini par $\lambda_r(Q) = \sum_{j:r \in q_j} w_j$. Ces jeux s'appellent des jeux de *congestion pondérés*.

Théorème 20 ([Fotakis et al., 2005]) *Les jeux de congestion pondérés sont des jeux de potentiel exact si les fonctions de coût sont linéaires.*

Par contre, ce n'est pas le cas si les fonctions de coût ne sont pas linéaires. En effet, certaines instances ne possèdent pas d'équilibres de Nash purs. Considérons l'exemple tiré de [Roughgarden, 2007]. Le réseau est représenté par la figure 5.1 et les poids des arêtes correspondent à leur fonction de coût. Deux joueurs sont en concurrence voulant transiter de l'information du sommet s vers t avec $w_1 = 1$ et $w_2 = 2$. Cette instance ne possède pas d'équilibre de Nash pur. En effet, si le joueur 1 choisit le chemin st , alors la meilleure réponse pour le joueur 2 est le chemin svt . Et de plus si le joueur 2 choisit le chemin svt , alors la meilleure réponse pour le joueur 1 est le chemin $svut$, ainsi de suite.

5.2.2 Les jeux d'ordonnancement

Dans les jeux d'*ordonnancement* définis dans [Koutsoupias and Papadimitriou, 1999], les ressources sont en fait les machines, et les joueurs correspondent aux tâches. Les joueurs choisissent une seule machine pour exécuter leur tâche (un singleton de $[m]$). Cependant, l'espace des stratégies pures $\mathcal{S}_i$ du joueur i responsable d'une tâche de longueur w_i peut être soit $[m]$ ou soit un sous-ensemble de $[m]$, et une stratégie pure $q_i \in \mathcal{S}_i$ pour le joueur i est un élément $r \in [m]$. On notera le jeu d'ordonnancement à *accès restreint* si l'espace des stratégies pures pour chacun des joueurs n'est pas $[m]$.

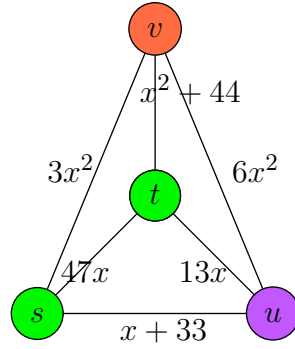


FIG. 5.1 – Jeu de congestion pondéré où il n'existe pas d'équilibre de Nash pur

Le coût pour le joueur (tâche) i pour le profil de stratégies pures (placement de toutes tâches sur les machines) $Q = (q_1, \dots, q_n)$ correspond à $c_i(Q) = C_{q_i}(\lambda_{q_i}(Q))$, où $\lambda_r(Q)$ est la charge de la machine r : $\lambda_r(Q) = \sum_{j:q_j=r} w_j$, c'est-à-dire la somme des longueurs de toutes les tâches placées sur r .

En fait, la fonction de coût d'une ressource permet de modéliser les différentes vitesses d'exécution. Par exemple,

1. Les machines peuvent être identiques : les fonctions de coût sont identiques ;
2. Les machines n'ont pas la même vitesse mais elles sont comparables entre elles : les fonctions de coûts sont linéaires. Ce modèle s'appelle le *modèle uniformément relié*.
3. Les machines ne sont pas comparables. C'est le modèle n'ayant aucune contrainte sur les vitesses des machines. Nous ne discuterons pas de ce modèle mais pour avoir plus d'informations le lecteur pourra se référer aux articles [Immorlica et al., 2009, Dürr and Thang, 2009].

Théorème 21 ([Christodoulou et al., 2004]) *Les jeux d'ordonnancement ayant des machines identiques ou uniformément reliées sont des jeux de potentiel exact.*

Ce qui implique que de tels jeux possèdent des équilibres de Nash pur. De plus, l'algorithme d'ordonnancement de liste¹ utilisant l'ordre des tâches de longueurs décroissantes (LPT) construit un équilibre de Nash pur.

Théorème 22 ([Even-Dar et al., 2003, Fotakis et al., 2002]) *Calculer un équilibre de Nash pur peut se résoudre en temps polynomial pour les jeux d'ordonnancement.*

La figure 5.2 représente trois équilibres de Nash purs dans un jeu d'ordonnancement composé de 5 tâches ($w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 3, w_4 = 4, w_5 = 6$) sur deux machines identiques. Dans ces trois configurations, aucune tâche ne peut migrer en diminuant son coût. Il est à noter que l'équilibre de Nash pur représenté dans figure 5.2.(b) est obtenu par l'algorithme d'ordonnancement de liste LPT.

Notons, que les jeux d'ordonnancement correspondent aux jeux de congestion pondérés dont le réseau est composé de deux noeuds et de plusieurs liens parallèles. La table 5.5 résume les principales caractéristiques de ces deux classes de jeux.

¹Un algorithme d'ordonnancement de liste est un algorithme de placement de tâches au plus tôt selon l'ordre donné par une liste des tâches.

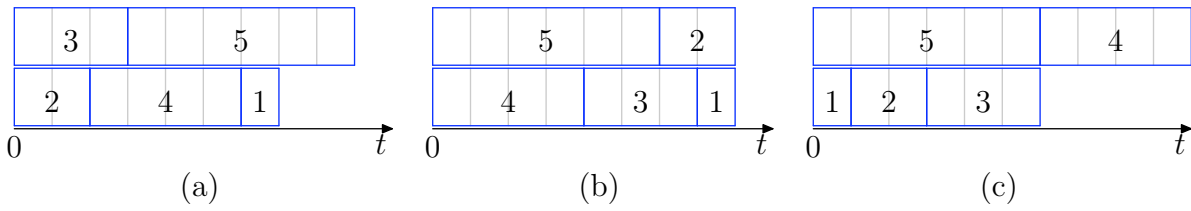


FIG. 5.2 – Trois équilibres de Nash purs dans le jeu d’ordonnement composé de 5 tâches ($w_1 = 1$, $w_2 = 2$, $w_3 = 3$, $w_4 = 4$, $w_5 = 6$) sur deux machines identiques.

	Jeux de congestion		Jeux d’ordonnement
	non pondéré	pondéré avec des coûts	
		linéaire arbitraire	
Ressources	Arêtes d’un graphe		Machines
Stratégie	Ensemble d’arêtes		Machine
jeu de potentiel	OUI	NON	OUI
Équilibre de Nash pur	OUI	NON	OUI
Calcul d’un équilibre pur	PLS-complet	NP-complet	Polynomial

TAB. 5.5 – Comparaison entre les jeux de congestion et les jeux d’ordonnement.

5.2.3 Les jeux d’allocation de tâches

Des variantes ont été étudiées : par exemple [Christodoulou et al., 2004]) considère des jeux que l’on appellera des jeux d’*allocation de tâches*. Comme pour les jeux d’ordonnement, le joueur est responsable d’une tâche et dans ce contexte, son coût correspondra à la date de fin d’exécution de sa tâche. Mais chaque ressource r a une fonction C_r qui retourne un coût $C_{r,j}$ pour chaque joueur j un en fonction de l’ensemble $\lambda \subset [n]$ de tâches allouées. Le coût du joueur i pour le profil de stratégies pures Q est donc donné par $c_i(Q) = C_{q_i,i}(\{j|q_j = q_i\})$. Les fonctions $C_{r,j}$ peuvent modéliser les vitesses, les politiques d’ordonnement des machines mais aussi les coût associés pour chaque joueur comme le temps de fin des tâches. Nous considérons trois politiques classiques suivantes :

- la *politique SPT* (*Shortest Processing Time* en anglais) ordonnent les tâches dans l’ordre croissant des longueurs de tâches.
- la *politique LPT* (*Longest Processing Time* en anglais) ordonnent les tâches dans l’ordre décroissant des longueurs des tâches.
- la *politique aléatoire* (*Randomized policy* en anglais) ordonnent aléatoirement les tâches suivant une loi uniforme de probabilité.

Remarquons que les jeux d’ordonnement sont équivalents aux jeux d’allocation de tâches dont les machines ont la politique d’ordonnement aléatoire. En effet, l’espérance de la fin d’une exécution d’une tâche sur une machine r dans ce modèle est égal à la moitié de la somme de la charge r plus sa longueur [Koutsoupias and Papadimitriou, 1999]. Ce n’est pas le cas pour les politiques d’ordonnement *SPT* et *LPT* (voir figure 5.3).

Tous ces types deux jeux restreints aux machines identiques ou uniformément reliées possèdent des équilibre de Nash purs.

Théorème 23 ([Christodoulou et al., 2004, Immorlica et al., 2009]) *Quelque soit*

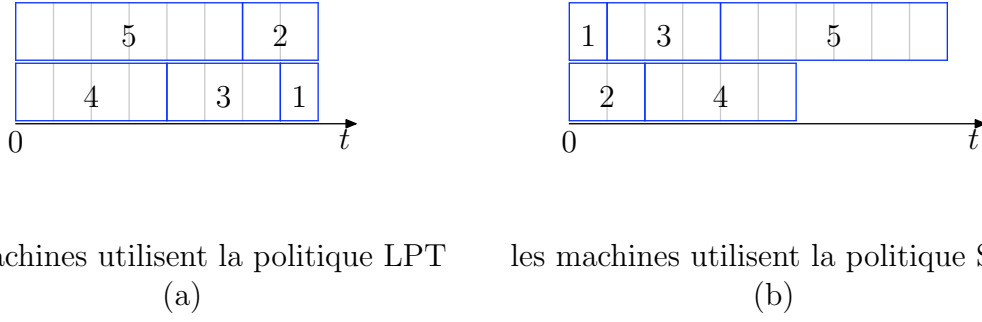


FIG. 5.3 – Équilibre de Nash dans le jeu d’ordonnancement composé de cinq tâches ($w_1 = 1$, $w_2 = 2$, $w_3 = 3$, $w_4 = 4$, $w_5 = 6$) sur deux machines identiques. Lorsque les machines utilisent les politiques d’ordonnancement SPT, l’équilibre de Nash pur (b) n’est pas un équilibre pour la version du jeu d’ordonnancement.

la politique d’ordonnancement des machines qu’on suppose la même sur toutes les machines, les jeux d’allocation de tâches ayant des machines identiques ou uniformément reliées sont des jeux de potentiel ordinal.

En effet, dans [Christodoulou et al., 2004], l’existence d’un équilibre de Nash pur a été prouvée de la façon suivante : à chaque profil pur est associé un vecteur regroupant les coûts de tous les joueurs triés en suivant l’ordre décroissant lexicographique. A partir d’un profil pur arbitraire, une suite de profils est construite de telle façon que le profil au rang t est identique à celui du rang $t - 1$ à l’exception d’un joueur qui améliore son coût en choisissant une autre stratégie (correspondant à une meilleur réponse). En fait, à partir de cette construction, il est facile de construire une fonction de potentiel ordinal $\phi(Q) = \sum_i c_i(Q)Z^{n-i}$ avec Z une borne supérieure du coût.

Une extension naturelle est d’étendre ces jeux, en considérant maintenant qu’un joueur est responsable de plusieurs tâches. Ainsi, le coût d’un joueur peut être redéfini comme la somme des dates de fin d’exécution de ses tâches.

Nous avons prouvé [43] qu’il n’existe pas d’équilibre de Nash pur même si le jeu ne possède que deux machines identiques ayant la même politique d’ordonnancement (LPT, SPT, aléatoire). La figure 5.4 représente le contre-exemple : quelque soit la configuration, un des deux joueurs peut diminuer son coût.

Suite à ces résultats négatifs, une première approche est de considérer la notion ϵ -équilibre de Nash.

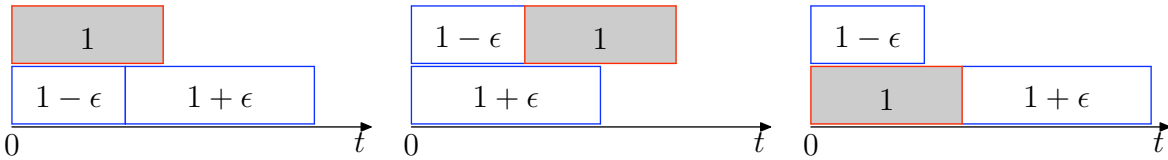


FIG. 5.4 – Exemple de jeu d’allocation n’ayant pas d’équilibre de Nash pur et de $(\frac{3}{2} - \epsilon)$ -équilibre de Nash : ses ressources sont deux machines identiques utilisant la politique SPT. Il y a deux joueurs : le joueur 1 est responsable de deux tâches de longueur $1 - \epsilon$ et de $1 + \epsilon$ et, le joueur 2 d’une tâche de longueur 1.

Définition 25 (ϵ -équilibre de Nash) Un ϵ -équilibre de Nash pur est un profil pur $s = (s_1, \dots, s_n)$ tel que

$$\forall i \quad \forall s'_i \in S_i \quad c_i(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n) \leq \epsilon \times c_i(s_1, \dots, s'_i, \dots, s_n).$$

Nous avons constaté [43] que pour la politique SPT, il existe toujours des 2-équilibres de Nash purs : cela correspond tout simplement à ordonnancer les tâches au plus tôt en commençant par la plus courte jusqu'à la plus longue. De plus, l'instance représentée par la figure 5.4 ne possède pas de $(\frac{3}{2} - \epsilon)$ -équilibre de Nash : pour toute configuration, les deux joueurs peuvent diminuer leur coût de $(\frac{3}{2} - \epsilon)$.

Pour les politiques d'ordonnancement LPT et aléatoires, les jeux ne possèdent pas toujours d' ϵ -équilibre [43]. Ce travail est en cours. Pour l'instant pour deux machines, nous avons des algorithmes pour calculer la meilleure réponse en temps polynomial d'un joueur en fonction des stratégies des autres joueurs. C'est une première étape pour calculer le plus petit α tel qu'il existe un α -équilibre de Nash pour une instance donnée.

5.3 Évaluation de la qualité des équilibres de Nash

Les jeux précédents possèdent au moins un équilibre de Nash pur. En général, ils en possèdent plusieurs. Comment peut-on les comparer entre-eux ? Comment peut-on mesurer le prix du manque de coordination entre les joueurs ?

Par exemple, le jeu d'ordonnancement représenté par la figure 5.2 possède cinq tâches ($w_1 = 1$, $w_2 = 2$, $w_3 = 3$, $w_4 = 4$, $w_5 = 6$) voulant s'exécuter sur les deux machines identiques. Il paraît difficile de les comparer :

	équilibre 5.2.(a)	équilibre 5.2.(b)	équilibre 5.2.(c)
coût moyen de joueurs	7, 8	8	7, 6
coût maximum de joueurs	9	8	10
différence des charges	2	8	4
⋮			

De plus, observons que tous les coûts des joueurs de l'équilibre 5.2.(b) sont plus petits que ceux de l'équilibre 5.2.(c). En fait l'équilibre 5.2.(c) n'est pas souhaitable pour tous les joueurs : changer de stratégies permet à tout le monde de faire diminuer son coût. C'est la notion de *Pareto optimalité*. Le jeu est dans un *état Pareto optimal* s'il est un état dans lequel aucun joueur ne peut diminuer son coût sans détériorer le coût d'au moins un autre.

Tout d'abord, plusieurs critères ont été définis pour cela en fonction de mesure d'équité entre les joueurs comme les indices de *Jain* [Jain et al., 1994] ou sur la distance entre l'équilibre de Nash et un état Pareto optimal [Legrand and Touati, 2007b]. L'index de *Jain* est un paramètre qui mesure les différents inégalités en terme de coût entre les joueurs tout en tenant compte de l'impact de leur existence.

Ces notions ont été principalement utilisées pour des jeux d'accès aux médium de communication dans les réseaux sans fils [Coucheney et al., 2009]. On pourra se référer à [Legrand and Touati, 2007a] pour un survol de ces deux notions. Un avantage de ces mesures est qu'elles se basent uniquement sur la fonction de coût des joueurs sans définir un coût global du système.

De plus, le système peut avoir plusieurs situations Pareto optimales, mais avec des performances sociales différentes.

Compte tenu de la description d'un système, l'évaluation des équilibres paraît difficile. Tout d'abord une mesure de qualité de performance (ou *coût social*) dans le jeu doit être définie. Par exemple, cela peut se quantifier en fonction des ressources utilisées par les joueurs : comme la bande passante, le temps maximum d'acheminement d'une information pour les jeux liés aux réseaux, ou la date moyenne de fin d'exécution des tâches, de la charge maximale des machines pour les jeux d'allocations de tâches.

Une fois le coût social exprimé (coût d'un état), il existe plusieurs mesures pour évaluer les équilibres. Une des mesures la plus étudiée est le prix de l'anarchie ou le prix de la non-coopération. Cette mesure indique la détérioration due au fait que les joueurs agissent dans leur propre intérêt.

Définition 26 (prix de l'anarchie) *Le prix de l'anarchie (noté PoA) d'un jeu J est le rapport entre le coût social du pire équilibre de Nash sur le coût social optimum.*

$$PoA(J) = \max_{E \in NE(J)} \frac{W(E)}{OPT(J)}$$

avec

- $W(E)$ représente le coût social de l'état E du jeu ;
- $OPT(E)$ représente le coût optimal parmi toutes les configurations du jeu ;
- $NE(J)$ est l'ensemble des équilibres de Nash.

Une autre mesure correspond au *prix de la stabilité* [Anshelevich et al., 2004], [Schulz and Moses, 2003], défini comme le rapport entre le coût social du meilleur équilibre de Nash sur le coût social optimum.

Il y a une multitude de travaux sur ces deux prix. Les deux paragraphes suivants correspondent à un résumé partiel des différents résultats sur les jeux de congestion et les jeux d'allocation de tâches.

Jeux de congestion : [Awerbuch et al., 2006], [Christodoulou and Koutsoupias, 2005a] prouvent que pour les jeux de congestion, le prix de l'anarchie pur est $5/2$ pour les fonctions de coût linéaires et $d^{\Theta(d)}$ pour des fonctions de coût étant des polynômes de degré maximum d . Cette dernière borne a été précisément calculée dans [Aland et al., 2006]. Dans le contexte des jeux pondérés, le prix de l'anarchie mixte est $(3 + \sqrt{5}/2)$ pour les fonctions de coût linéaires et $d^{\Theta(d)}$ pour des fonctions de coût étant des polynômes de degré maximum d .

Dans les jeux de congestion à fonctions de coût linéaires, le prix de la stabilité est $\Theta(\sqrt{n})$ avec n le nombre de joueurs [Christodoulou and Koutsoupias, 2005b].

De plus des travaux récents étudient le prix de l'anarchie et le prix de la stabilité en tenant en compte uniquement des équilibres avec certaines propriétés comme la Pareto optimalité : voir par exemple [Bilò et al., 2008, Chien and Sinclair, 2009].

Jeux d'ordonnancement et jeux d'allocations de tâches : La table 5.6 représente un résumé partiel de différents travaux sur le prix de l'anarchie en considérant que le coût social est le coût maximum parmi tous les joueurs. Des résultats sur les prix de la stabilité ont été établis [Agussurja and Lau, 2007], [Angel et al., 2006].

De plus, il existe des algorithmes d'approximation qui calculent des équilibres de Nash purs dont le coût social est proche à r de l'optimal : voir [Feldmann et al., 2003] pour un survol.

Le tableau suivant est inspiré de [Dürr and Thang, 2009] :

	politique SPT	politique LPT	politique aléatoire
machines identiques	$2 - \frac{1}{m}$ [Graham, 1966] [Immorlica et al., 2009]	$\frac{4}{3} - \frac{1}{3m}$ [Christodoulou et al., 2004] [Graham, 1969]	$2 - \frac{2}{m+1}$ [Finn and Horowitz, 1979] [Schuurman and Vredeveld, 2007]
machines uniformément reliées	$\Theta(\log m)$ [Aspnes et al., 1997] [Immorlica et al., 2009]	$1.52 \leq PoA \leq 1.59$ [Dobson, 1984, Friesen, 1987] [Immorlica et al., 2009]	$\Theta(\frac{\log m}{\log \log \mathcal{O}})$ [Czumaj and Vöcking, 2002]
machine identiques à accès restreint	$\Theta(\log m)$ [Aspnes et al., 1997] [Immorlica et al., 2009]	$\Theta(\log m)$ [Azar et al., 1995] [Immorlica et al., 2009]	$\Theta(\frac{\log m}{\log \log m})$ [Awerbuch et al., 2006] [Gairing et al., 2004]

TAB. 5.6 – Prix de l'anarchie pour les jeux d'allocation de tâches