Exercices sur les algorithmes probabilités
Nom du rédacteur : Johanne Cohen
https://www.lri.fr/~jcohen/pages/enseignement.html

Probabilité : analyse probabiliste

Nous utiliserons une fonction $random(k)$ qui tire un entier entre 1 et k de façon uniforme.

Sélectionner une partie d'un ensemble S de n éléments distincts.

Nous considérons un ensemble $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ de n éléments distincts.

Un premier algorithme : Considérons l'algorithme $\mathcal{B}$ suivant :
Entrée : Un ensemble $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ de n éléments et un entier k avec $k \leq n$.
Sortie : une partie C de S.

1. $C \leftarrow \emptyset$
2. pour i allant 1 à n faire
   (a) $Z_i \leftarrow random\_Bernoulli(\frac{k}{n})$
   (b) Si $Z_i = 1$ alors $C \leftarrow C \cup \{s_i\}$
3. retourner C

Question 1. Soit Y la variable aléatoire désignant la taille de C.

1. Exprimer Y en fonction des variables aléatoires Z_i.
2. La loi Y est-elle une loi de Bernoulli ? une loi géométrique ? une loi binomiale ?
3. Calculer $E[Y]$.

Question 2. L'algorithme $\mathcal{B}$ retourne-t-il toujours une partie de S de cardinalité k ?

Un second algorithme. Considérons l'algorithme $\mathcal{D}$ suivant :
Entrée : Un ensemble $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ de n éléments.
Sortie : une partie X de S.

1. $X \leftarrow \emptyset$
2. pour i allant 1 à n faire
   (a) $Z_i \leftarrow Bernoulli(\frac{1}{2})$
   (b) Si $Z_i = 1$ alors $X \leftarrow X \cup \{s_i\}$
3. retourner X

Question 3. Montrer que $Pr(X = \{s_1\}) = Pr(X = \emptyset) = \frac{1}{2}$ à la fin de la première itération de la boucle (c'est-à-dire lorsque $i = 1$)

Nous noterons par $\mathcal{P}(\{s_1, \ldots, s_i\})$ l'ensemble des parties de l'ensemble $\{s_1, \ldots, s_i\}$. Soit C une partie du sous-ensemble $\{s_1, \ldots, s_i\}$ de i éléments (avec $i \leq k$).

Question 4. Montrer que

1. $\mathcal{P}(\{s_1, \ldots, s_{i-1}\}) \subset \mathcal{P}(\{s_1, \ldots, s_i\})$
2. si $C \in \mathcal{P}(\{s_1, \ldots, s_i\}) \backslash \mathcal{P}(\{s_1, \ldots, s_{i-1}\})$, alors C contient s_i
3. le nombre de parties de l'ensemble $\{s_1, \ldots, s_i\}$ contenant l'élément s_i est égale à $|\mathcal{P}(\{s_1, \ldots, s_{i-1}\})|$

Question 5. Soit C une partie du sous-ensemble $\{s_1, \ldots, s_i\}$ de i éléments (avec $i \leq k$).

Montrer (par récurrence) que $Pr(X = C) = \frac{1}{|\mathcal{P}(\{s_1,\ldots,s_i\})|}$ à la fin de la $i$ème itération de la boucle.

Question 6. Que déduisez-vous sur l'algorithme $\mathcal{D}$.

Tableaux de n éléments contenant un ensemble S de n entiers distincts.

Nous considérons que le tableau T de n éléments contenant tous les entiers de S est généré aléatoirement de façon uniforme. Considérons l'algorithme $\mathcal{A}$ suivant :
Entrée : un tableau T de n éléments contenant les entiers de S, un entier ℓ.
Sortie : un entier i

1. $i \leftarrow 1$;
2. Tant que $[(T[i] \neq \ell)$ et $(i < n + 1)]$ faire $i \leftarrow i + 1$;
3. Si $(i \leq n)$ alors renvoyer i sinon renvoyer -1

Question 7. Dire ce que l'algorithme $\mathcal{A}$ retourne.

Question 8. Donner le nombre de comparaisons que l'algorithme $\mathcal{A}$ effectue dans le pire des cas.

Question 9. Donner le nombre moyen d'opérations de l'algorithme en supposant les faits 2 suivants :

1. l'entrée de l'algorithme est générée aléatoirement de façon uniforme.
2. ℓ est dans T.

Question 10. Donner le nombre moyen de comparaisons de l'algorithme en supposant les faits 2 suivants :

— l'entrée de l'algorithme est générée aléatoirement de façon uniforme.

— ℓ est dans T avec une probabilité $1/2$.

Question 11. Donner le nombre moyen de comparaisons de l'algorithme en supposant les faits 2 suivants :

— l'entrée de l'algorithme est générée aléatoirement de façon uniforme.

— ℓ est dans T avec une probabilité x.