

Exercices sur les algorithmes probabilités

Nom du rédacteur : Johanne Cohen

<https://www.lri.fr/~jcohen/cours-probabiliste.html>

## Algorithmes probabilistes : paradoxe des anniversaires

Supposons qu'il y a 30 personnes dans la salle. Est-il plus probable que deux personnes dans la salle partagent le même anniversaire ou que deux personnes dans la salle ne partagent pas le même anniversaire ?

Nous supposons que l'anniversaire de chaque personne est un jour de calendrier sur une année de 365 jours est choisi indépendamment et uniformément au hasard pour chaque personne.

### Focalisons nous sur la date d'anniversaire d'une personne $p$ .

Soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des jours de l'année. Notons  $X(p)$  la variable aléatoire désignant le jour de naissance de que la personne  $p$  soit née le jour  $j$ .

**Question 1.** Quelle est la probabilité que une personne soit née le jour  $j$  : *i. e.* calculer  $\Pr(X_p = j)$  ?

**Question 2.** Quelle est la probabilité que une personne ne soit pas née le jour  $j$  : *i. e.* calculer  $\Pr(X_p \neq j)$  ?

Notons  $X_p \notin \mathcal{J}$  l'évènement représentant le fait que l'anniversaire de la personne  $p$  n'est pas un jour de  $\mathcal{J}$ .

**Question 3.** Quelle est la probabilité  $\Pr(X_p \notin \mathcal{J})$  ?

### Focalisons nous sur les dates d'anniversaires de deux personnes $p_1$ et $p_2$ .

**Question 4.** Supposons que la personne  $p_1$  est née le jour  $j$ . Quelle est la probabilité que la personne  $p_2$  soit née le jour  $j$  : *i. e.* calculer  $\Pr(X_{p_2} = j | X_{p_1} = j)$  ?

**Question 5.** Supposons que la personne  $p_1$  est née le jour  $j$ . Quelle est la probabilité que la personne 2 ne soit pas née le jour  $j$  : *i. e.* calculer  $\Pr(X_{p_2} \neq j | X_{p_1} = j)$  ?

Notons  $\mathcal{B}_k$  l'évènement que  $k$  personnes ne sont pas nées le même jour.

**Question 6.** Quelle est la probabilité que deux personnes ne sont pas nées le même jour.

### Focalisons nous sur un ensemble de $k$ personnes.

Nous allons introduire l'évènement suivant  $\mathcal{E}(\mathcal{H}, J)$  qui désigne que

1. les anniversaires des personnes de  $\mathcal{H}$  sont dans l'ensemble  $\mathcal{J}$  ;
2. les personnes de  $\mathcal{H}$  ne sont pas nées le même jour ;

**Question 7.** Définir l'évènement  $\mathcal{B}_k$  en fonction des évènements  $\mathcal{E}(\mathcal{H}, J)$ . Donner sa probabilité en fonction de celles des évènements  $\mathcal{E}(\mathcal{H}, J)$ .

**Question 8.** Quelle est la probabilité que  $k$  personnes ne sont pas nées le même jour.

**Question 9.** En admettant que  $e^x \geq 1 + x$  pour tout  $x$ , donner une borne supérieure de  $\Pr(\mathcal{B}_k)$ .

**Question 10.** Donner le plus grand nombre de personnes tels que la probabilité que  $k$  personnes ne soient pas nées le même jour soit inférieur à  $1/2$ .