Exercices sur les algorithmes probabilités
Nom du rédacteur : Johanne Cohen
`https://www.lri.fr/~jcohen/pages/enseignement.html`

Algorithmes probabilistes : ranger n balles pour m boîtes

Le problème concerne le placement aléatoire de n balles dans m boîtes. Chaque balle est placée dans l'une des boîtes de façon uniforme. Une fois que toutes les balles sont dans les boîtes, nous regardons le nombre de balles dans chaque boîte ; nous appelons ce nombre la charge de la boite. Nous nous intéressons au problème suivant : quelle est la charge maximale d'un seul bac ?

Notons par X_i la variable aléatoire désignant le nombre de balles contenue dans la $i$ème boîte.

Question 1. Quelle devrait être la valeur de n pour que chaque boîte contient au moins une balle en moyenne ($\forall i\ E[X_i] \geq 1$) ?

Question 2. Calculer $E[X_i]$?

Question 3. Calculer $Pr[X_i = k]$?

Question 4. Soit S un sous-ensemble de $\{1, 2, \cdots, n\}$. Notons par $\mathcal{A}_S$ l'évènement que la balle s soit dans la boite i pour tout $s \in S$.

Donner la probabilité de $Pr(\mathcal{A}_S)$?

Question 5. Montrer $Pr[X_i \geq k] \leq \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{1}{m}\right)^k$? *utiliser la question précédente et l'inégalité de Boole.*

Question 6. Montrer que $Pr[X_i \geq k] \leq \left(\frac{ne}{mk}\right)^k$ sachant que $(\frac{n}{k})^k \leq \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \leq (\frac{en}{k})^k$?

En supposant qu'il existe le même nombre de boîtes et de balles : $n = m$

Question 7. En déduire $Pr(X_i \geq k) \leq (\frac{e}{k})^k$ sachant que $(\frac{n}{k})^k \leq \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \leq (\frac{en}{k})^k$?

Question 8. En posant $k = \frac{3 \ln n}{\ln \ln n}$, montrer que $\Pr(X_i \geq k) \leq \frac{1}{n^2}$ Notons par X, la variable aléatoire désignant la charge maximum des boîtes

$$X = max X_i$$

Question 9. Montrer que $Pr(X \geq k) \leq n(\frac{e}{k})^k$.

Question 10. En posant $k = \frac{3 \ln n}{\ln \ln n}$, montrer que $Pr[X \geq k] \leq \frac{1}{n}$.

Question 11. En posant $k = \frac{3 \ln n}{\ln \ln n}$, montrer que $Pr(X < k)) \geq 1 - \frac{1}{n}$

Question 12. Soit k fixé. Montrer que $E[X] \leq kPr(X < k) + nPr(X \geq k)$.

Question 13. Lorsque $m = n$, quelle est la charge moyenne maximale sur l'ensemble des boîtes ?