Exercices sur les algorithmes probabilités
Nom du rédacteur : Johanne Cohen
`https://www.lri.fr/~jcohen/pages/enseignement.html`

Algorithmes probabilistes : recrutement d'un collaborateur

Embauche d'un collaborateur.

Cet ennoncé de cet exercice se base sur le livre *Introduction to Algorithms* de T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, and C. Stein à the MIT Press, 2 edition, (2001).

Une société veut recruter un nouvel collaborateur. Il y a n candidats possibles. Elle interviewe un candidat par jour et elle décide ensuite de l'embaucher ou non.

Question 1. La société utilise la procedure suivante :
Entrée : une liste de n candidats
Sortie : un candidat

1. La société génère une liste de passage des n candidats de façon uniforme.
2. La société interviewe le candidat 1 et elle l'embauche
3. pour tous les candidats v faire
   (a) La société interviewe le candidat v
   (b) si le candidat v est meilleur que celui embauché alors
      i. La société renvoie le candidat embauché
      ii. elle embauche le candidat v

Il y a un coût pour interviewer (coût c_i) et pour embaucher (coût c_h).

Question 1.1 Donner le coût de la procédure au pire des cas, au meilleur des cas.

Maintenant nous allons évaluer le coût moyen de la procédure.

Question 1.2 Notons X_i la variable aléatoire indicatrice de l'événement correspondant aux fait que le candidat i soit embauché durant le processus.

1. Donner la définition formelle.
2. Calculer $\Pr(X_i = 1)$.
3. Calculer $E(X_i)$.

Question 1.3 Donner le nombre moyen d'embauches dans la la procédure.

Question 1.4 En déduire le coût moyen de la procédure.

Question 2. Comme chaque interview a un coût pour la société, **la société ne souhaite pas interroger tous les candidats** afin de trouver le candidat le plus compétent. Pour cela, la société est prête à se contenter d'un candidat dont les compétences sont proches du candidat le plus compétent, en échange d'un recrutement unique.

La société utilise la procedure suivante : elle reçoit les candidats. Après avoir rencontré le candidat i, elle lui attribue un score noté $score(i)$. **Ici, nous supposons qu'aucun**

candidat ne reçoive le même score. Après avoir vu k candidats, la société connaît le score le plus élevé (que l'on notera $Meilleur\_score$) des k premiers candidats. Ensuite la société sélectionnera le premier candidat qui aura un score plus grand que les k premiers candidats. Voici la procédure dans un pseudo-code :
Entrée : deux entiers k, et n correspondant le nombre de candidats
Sortie : le candidat sélectionné

1. $Meilleur\_score \leftarrow -\infty$
2. pour tout entier t allant de 1 à k faire
   (a) si $score(t) > Meilleur\_score$ alors $Meilleur\_score \leftarrow score(t)$
3. pour tout entier t allant de $k+1$ à n faire
   (a) si $score(i) > Meilleur\_score$ alors Retourner t
4. Retourner n

L'ordre du passage des candidats se fait aléatoirement et uniformément.

Question 3. Soit B_t l'événement que le candidat le plus compétent soit à la place t. Donner la probabilité $\Pr(B_t)$ tout en justifiant.

Question 4. Soit O_t l'événement qu'aucun des candidats de la position k à la position $t-1$ soit retenu. Donner la probabilité $\Pr(O_t)$ tout en justifiant.

Soit S_t l'événement **que le candidat le plus compétent soit à la place** t **et qu'il soit retenu.**

Question 5. Donner la probabilité de l'événement S_t lorsque $1 \leq t \leq k$.

Question 6. ontrer que les événements O_t et B_t sont indépendants.

Question 7. Montrer que $\Pr(S_t) = \frac{k}{n(t-1)}$ pour $t > k$.

Nous admettrons que $\ln j - \ln \ell \leq \displaystyle\sum_{i=\ell}^{j} \frac{1}{i} \leq \ln(j-1) - \ln(\ell-1)$.

Question 8. Soit S l'événement que le candidat le plus compétent soit retenu.

1. Exprimer S et $\Pr(S)$ en fonction des S_t.
2. Quelle est la probabilité $\Pr(S)$ que le meilleur candidat soit sélectionné ? Vous pouvez encadrer cette probabilité.

Question 9. En posant $k = n/3$. Donner l'ordre de grandeur de la probabilité $\Pr(S)$ en sachant que $\ln a - \ln b = \ln(\frac{a}{b})$ et $\ln 3 \approx 1.09$. Quand déduisez-vous ?