Exercices sur les algorithmes probabilités
Nom du rédacteur : Johanne Cohen
https://www.lri.fr/~jcohen/pages/enseignement.html

Probabilité : génération de tableaux

Nous utiliserons une fonction $random(k)$ qui tire un entier entre 1 et k de façon uniforme.

Tableaux de n éléments contenant un ensemble S de n entiers distincts.

Soit S un ensemble de n éléments. Nous voulons générer aléatoirement un tableau T contenant S de façon uniforme.

Question 1. Enumérer tous les tableaux contenant l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

1. $T = [1, 2, 3]$
2. $T = [1, 3, 2]$
3. $T = [2, 1, 3]$
4. $T = [2, 3, 1]$
5. $T = [3, 1, 2]$
6. $T = [3, 2, 1]$

Nous noterons par $\mathcal{T}_S(\ell)$, l'ensemble de tableaux contenant S sachant que leur premier élément est ℓ.

Question 2. Soit ℓ et ℓ' deux éléments de S. Montrer que $|\mathcal{T}_S(\ell)| = |\mathcal{T}_S(\ell)|$.

Soit $\mathcal{T}_S(\ell)$ l. Nous allons construire une fonction $f : \mathcal{T}_S(\ell) \to \mathcal{T}_S(\ell')$ de la façon suivante : $f(T) = T'$ si

— $T'[1] = \ell'$

— $T'[i] = \begin{cases} T[i] & si \quad T[i] \neq \ell' \\ \ell & si \quad T[i] \neq \ell' \end{cases}$

Maintenant il suffit de prouver que f est une bijection, c'est à dire que

— $f(T)$ est bien un tableau dans $\mathcal{T}_S(\ell')$;

— $f(T)$ a une unique image $\mathcal{T}_S(\ell')$;

— pour tout T' dans $\mathcal{T}_S(\ell')$, il existe un unique T dans $\mathcal{T}_S(\ell)$ tel que $f(T) = T'$

Notons $\alpha(n)$ le nombre de tableaux de n éléments.

Question 3. Soit ℓ un élément de S avec $|S| > 1$. Montrer que $|\mathcal{T}_S(\ell)| = \ \alpha(n-1)$.

Un tableau de n éléments contenant tous les entiers de S tel que l'entier ℓ soit à la position 1 peut être vue comme la concaténation deux tableaux

1. le premier est un tableau d'un élément contenant l'entier ℓ

2. le deuxième est un tableau de $n-1$ éléments contenant des éléments de $S\backslash\{\ell\}$

On peut associer un tableau de $n-1$ éléments contenant tous les entiers de $X\backslash\{\ell\}$ avec un tableau de n éléments contenant tous les entiers de S avec $T[1]=\ell$. Et réciproquement, c'est-à-dire, on peut construire un tableau de n éléments tel que $T[1]=\ell$, à partir d'un tableau de $n-1$ éléments contenant des éléments de $S\backslash\{\ell\}$.

Donc le nombre de tableaux de n éléments contenant tous les entiers de S tel que l'entier ℓ soit à la position 1 est

$$\alpha(n-1).$$

Question 4. Donner la formule de récurrence pour la fonction $\alpha(n)$.

Tout d'abord, il y a un seul tableau de 1 élément : $\alpha(1)=1$.

Maintenant considérons un tableau de n éléments. D'après la question précédente, le nombre de tableaux de n éléments contenant tous les entiers de S tel que l'entier ℓ soit à la position 1 est $\alpha(n-1)$.

Maintenant, comme toutes les valeurs peuvent être à la première position, il y a n possibilités pour la valeur de $T[1]$. Donc, on obtient

$$\alpha(n)=n\cdot\alpha(n-1)$$

$$\alpha(n)=\left\{\begin{array}{ccc} n\cdot\alpha(n-1) & si & n>1 \\ 1 & si & n=1 \end{array}\right.$$

Soit T la variable aléatoire correspondant au tableau généré de façon uniforme. Nous notons par $\mathcal{E}_S(T=B)$ l'évènement tel que le tableau généré par l'algorithme est le tableau B à partir de l'ensemble S.

Question 5. Soit B un tableau donné de n éléments contenant S. Quelle est la probabilité que le tableau généré de façon uniforme vaut B.

Par définition de la notion uniforme, l'évènement que le tableau généré de façon uniforme vaut B se réalise avec la même probabilité que l'évènement que le tableau généré de façon uniforme vaut B'.

$$Pr(\mathcal{E}_S(T=B))=Pr(\mathcal{E}_S(T=B'))$$

Comme $$\sum_{B' \text{ un tableau contenant } S} Pr(\mathcal{E}_S(T=B'))=1$$

$$Pr(\mathcal{E}_S(T=B))=\frac{1}{\alpha(n)}$$

Soit $\mathcal{E}_S(T[i] = \ell)$ l'évènement tel que le tableau généré uniformément à partir de l'ensemble S est tel que l'entier ℓ de S soit à la position i dans T ($i.e$ $T[i] = \ell$).

Question 6. Donner la probabilité $(Pr(\mathcal{E}_S(T[1] = \ell))$.

$$\mathcal{E}_S(T[1] = \ell) = \cup_{B \in \mathcal{T}_S(\ell)} \mathcal{E}_S(T = B)$$

$$Pr(\mathcal{E}_S(T[1] = \ell)) = \sum_{B \in \mathcal{T}_S(\ell)} Pr(\mathcal{E}_S(T = B))$$

$$Pr(\mathcal{E}_S(T[1] = \ell)) = \alpha(n-1) \cdot \frac{1}{\alpha(n)} = \frac{1}{n}$$

Question 7. Calculer $Pr(\mathcal{E}_S(T = B)|\mathcal{E}_S(T[1] = B[1]))$

$$\mathcal{E}_S(T = B) = \mathcal{E}_S(T[1] = B[1]) \wedge \mathcal{E}_{S\{B[1]\}}(T[2 \cdots n] = B[2 \cdots n])$$

$$Pr(\mathcal{E}_S(T = B)|\mathcal{E}_S(T[1] = B[1])) = \frac{Pr(\mathcal{E}_S(T = B)) \wedge \mathcal{E}_S(T[1] = B[1]))}{Pr(\mathcal{E}_S(T[1] = B[1]))}$$

$$Pr(\mathcal{E}_S(T = B)|\mathcal{E}_S(T[1] = B[1])) = Pr(\mathcal{E}_{S\{B[1]\}}(T[2 \cdots n] = B[2 \cdots n]))$$

Question 8. Concevoir un algorithme qui construit un tableau T retourne un tableau de n éléments contenant tous les entiers de S de façon uniforme. Donner sa complexité.

Algorithme Génération_Tableau
Entrée : un ensemble d'entiers S de n éléments
Sortie : un tableau T

1. si $n = 1$ alors retourner S
2. Créer le tableau T de n éléments
3. pour i allant de 1 à n faire
   (a) Tirer aléatoire un entier entre 1 et $|S|$
   (b) $\ell \leftarrow$ le ième élément de S
   (c) retirer ℓ de S
   (d) $T[i] = \ell$
4. Retourner T

A chaque itération de la boucle i, l'algorithme construit le tableau T telle que

- $Pr((T[i] = \ell|$les $i-1$ premiers éléments sont fixés$) = \frac{1}{|S|} = \frac{1}{n+1-i}$
- ou $Pr(\mathcal{E}(T[i] = \ell)|\bigcap_{\ell=1}^{i-1} \mathcal{E}(T[\ell] = u_\ell)) = \frac{1}{|S|} = \frac{1}{n+1-i}$ en écrivant sous forme d'évènements.

Nombre moyen d'opérations pour trouver le minimum dans un tableau

Nous considérons que le tableau T de n éléments contenant tous les entiers de S est généré aléatoirement de façon uniforme. Considérons l'algorithme suivant :

Algorithme Rechercher_Le_Minimun
Entrée : un tableau T de n éléments
Sortie : un élément s_{min}

1. $s_{min} \leftarrow T[1]$
2. pour i allant de 2 à n faire
   (a) si $s_{min} > T[i]$, alors $s_{min} \leftarrow T[i]$
3. Retourner s_{min}

Question 9. Donner la complexité au pire de cet algorithme.

La complexité de cet algorithme est de $\mathcal{O}(n)$ opérations (à cause de la boucle pour).

Question 10. Donner la probabilité que le minimum de S soit à la position i.

Soit s_{min} minimum de S soit à la position i. D'après une question précédente, la probabilité que l'entier s_{min} de S soit à la position 1 dans T est égale $\frac{1}{n}$.
Le raisonnement peut s'appliquer à n'importe quelle autre position. Donc, la probabilité que l'entier s_{min} de S soit à la position i dans T est égale $\frac{1}{n}$.

Question 11. Donner le nombre moyen d'opérations pour trouver le minimum dans un tableaux de n éléments.

Soit X la variable aléatoire qui désigne l'indice où se trouve le minimum du tableau. Remarquons que

— si $X = 1$ alors, il n'y a aucune comparaison à faire avant de trouver le minimum.

— si $X = \ell$ alors, il y a $\ell - 1$ comparaisons à faire avant de trouver le minimum.

Notons Y la variable aléatoire qui désigne le nombre d'opérations nécessaire pour trouver le minimum. Remarquons que si $Y = \ell$, alors $X = \ell + 1$. Nous devons calculer $E[Y]$.

$$
\begin{aligned}
E[Y] &= \sum_{i=0}^{n-1} iPr(Y = i) \\
&= \sum_{i=2}^{n} (i-1)Pr(X = i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}(i) = \frac{1}{n}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n-1)}{2}
\end{aligned}
$$