

Exercices sur les algorithmes probabilités

Nom du rédacteur : Johanne Cohen

<https://www.lri.fr/~jcohen/pages/enseignement.html>

Probabilité : génération de tableaux

Nous utiliserons une fonction $random(k)$ qui tire un entier entre 1 et k de façon uniforme.

Tableaux de n éléments contenant un ensemble S de n entiers distincts.

Soit S un ensemble de n éléments. Nous voulons générer aléatoirement un tableau T contenant S de façon uniforme.

Question 1. Enumérer tous les tableaux contenant l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Nous noterons par $\mathcal{T}_S(\ell)$, l'ensemble de tableaux contenant S sachant que leur premier élément est ℓ .

Question 2. Soit ℓ et ℓ' deux éléments de S . Montrer que $|\mathcal{T}_S(\ell)| = |\mathcal{T}_S(\ell')|$.

Notons $\alpha(n)$ le nombre de tableaux de n éléments.

Question 3. Soit ℓ un élément de S avec $|S| > 1$. Montrer que $|\mathcal{T}_S(\ell)| = \alpha(n - 1)$.

Question 4. Donner la formule de récurrence pour la fonction $\alpha(n)$.

Soit T la variable aléatoire correspondant au tableau généré de façon uniforme. Nous notons par $\mathcal{E}_S(T = B)$ l'évènement tel que le tableau généré par l'algorithme est le tableau B à partir de l'ensemble S .

Question 5. Soit B un tableau donné de n éléments contenant S . Quelle est la probabilité que le tableau généré de façon uniforme vaut B .

Soit $\mathcal{E}_S(T[i] = \ell)$ l'évènement tel que le tableau généré uniformément à partir de l'ensemble S est tel que l'entier ℓ de S soit à la position i dans T (*i.e* $T[i] = \ell$).

Question 6. Donner la probabilité ($Pr(\mathcal{E}_S(T[1] = \ell))$).

Question 7. Calculer $Pr(\mathcal{E}_S(T = B) | \mathcal{E}_S(T[1] = B[1]))$

Question 8. Concevoir un algorithme qui construit un tableau T retourne un tableau de n éléments contenant tous les entiers de S de façon uniforme. Donner sa complexité.

Nombre moyen d'opérations pour trouver le minimum dans un tableau

Nous considérons que le tableau T de n éléments contenant tous les entiers de S est généré aléatoirement de façon uniforme. Considérons l'algorithme suivant :

Algorithme Rechercher_Le_Minimum

Entrée : un tableau T de n éléments

Sortie : un élément s_{min}

1. $s_{min} \leftarrow T[1]$

2. pour i allant de 2 à n faire
 - (a) si $s_{min} > T[i]$, alors $s_{min} \leftarrow T[i]$
3. Retourner s_{min}

Question 9. Donner la complexité au pire de cet algorithme.

Question 10. Donner la probabilité que le minimum de S soit à la position i .

Question 11. Donner le nombre moyen d'opérations pour trouver le minimum dans un tableaux de n éléments.