Exercices sur les algorithmes probabilités
Nom du rédacteur : Johanne Cohen
https://www.lri.fr/~jcohen/pages/enseignement.html

Probabilité : Dénombrement et génération

Nous utiliserons une fonction $random(k)$ qui tire un entier entre 1 et k de façon uniforme.

Génération d'une loi de probabilité

Question 1. Soit $\mathcal{E}(i)$ l'événement suivant : la fonction $random(p)$ retourne la valeur i. Que vaut la probabilité $Pr(\mathcal{E}(i))$?

Question 2. Soit X une variable aléatoire qui peut prendre la valeur entière soit 0 à 1. Soit α et p deux entiers tels que $\alpha \leq p$. Fixons la loi de probabilité suivante : $Pr(X = 0) = \frac{\alpha}{p}$.

— Que vaut la probabilité $Pr(X = 1)$?

— Soit ℓ est un entier tel que $0 < \ell$ et $\ell + \alpha - 1 \leq p$. Calculer la probabilité de l'évènement $\bigcup_{j=\ell}^{\ell+\alpha-1} \mathcal{E}(j)$.

— Concevoir un algorithme qui permet de tirer une valeur aléatoire en fonction de cette loi de probabilité.

Question 3. Soit X une variable aléatoire qui peut prendre la valeur entière de 0 à n. Soit p un entier. Soit $n+1$ entiers tel $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ tel que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i = p$. Fixons la loi de probabilité suivante : $Pr(X = i) = \frac{\alpha_i}{p}$.

Concevoir un algorithme qui permet de tirer une valeur aléatoire en fonction de cette loi de probabilité.

Parties dans un ensemble S de n éléments

Nous allons considérer que S correspond aux n premiers entiers positifs : $S = \{1, \cdots, n\}$. Nous rappellons qu'une ***partie*** de S est un sous-ensemble de S.

Question 4. Enumérer toutes les parties de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$.

Question 5. Notons par $\mathcal{P}(S)$ l'ensemble de toutes les parties de S. Nous allons considérons une fonction $f : P(S) \to \mathbb{N}$ tel que

$$f(C) = \mathbf{x} \text{ avec } \mathbf{x} = \sum_{\ell \in C} 2^{\ell-1}$$

1. Calculer $f(C)$ quand $C = \emptyset$. $C = \{3\}$, et $C = \{1, 3\}$.
2. Soit C une partie de S. Montrer que il existe un entier $\mathbf{x}$ compris entre 0 et $2^n - 1$ tel que $f(C) = \mathbf{x}$. En déduire que $|\mathcal{P}(S)| \leq 2^n$.

3. Montrer que pour un entier **x** compris entre 0 et $2^n - 1$, il existe une partie C de S telle que $f(C) = x$.
4. En déduire que le nombre de parties de S est 2^n.

Question 6. Quelle est la probabilité de générer une partie C si elle est construite de façon uniforme.

Question 7. Concevoir un algorithme qui construit une partie de S générée de façon uniforme.