Exercices sur les algorithmes probabilités
Nom du rédacteur : Johanne Cohen
https://www.lri.fr/~jcohen/pages/enseignement.html

Algorithmes probabilistes : collectionneur de vignettes

Un collectionneur cherche à avoir toutes les vignettes d'une série représentant des joueurs de foot. Pour avoir une vignette, il doit acheter un paquet de céréales. Chaque boîte de céréales contient une carte choisie de manière uniforme et indépendante au hasard parmi ces n possibilités.

Le collectionneur veut absolument une carte.

Supposons que Gabriel Durant soit l'un des n joueurs de foot. Supposons que le collectionneur est un grand fan de lui : il veut absolument sa carte.

Question 1. Notons $\mathcal{A}_i$ l'évènement que la ième boîte ne contienne pas la carte de Gabriel Durant. Quelle est la probabilité de cet évènement ?

> La probabilité pour que la carte soit dans la packet est $\frac{1}{n}$ puisqu'il y a n vignettes différentes. Donc la probabilité pour que la carte ne soit pas dans la packet est
>
> $$Pr(\mathcal{A}_i) = (1 - \frac{1}{n})$$

Question 2. Notons $\mathcal{B}$ l'évènement qu'aucune des m premières boîtes achetées contiennent la carte de Gabriel Durant. Quelle est la probabilité cet évènement ?

> Cela signifie que pour les m premières boîtes achetées, l'évènement $\mathcal{A}_i$, $i = 1, \cdots, m$, se réalise. Donc on peut définir l'évènement $\mathcal{B}$ de la façon suivante :
>
> $$\mathcal{B} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{A}_m$$
>
> Comme les évènements $\mathcal{A}_i$, $i = 1, \cdots, m$ sont des évènements indépendants, on a
>
> $$\begin{aligned} Pr(\mathcal{B}) &= Pr(\mathcal{A}_1)Pr(\mathcal{A}_2)\cdots Pr(\mathcal{A}_m) \\ &= (1 - \tfrac{1}{n})^m \end{aligned}$$

Question 3. Notons $\mathcal{C}$ l'évènement que nous avons la carte de Gabriel Durant après avoir acheté m boîtes. Quelle est la probabilité cet évènement ?

> $$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \mathcal{B}^c \\ Pr(\mathcal{C}) &= 1 - (1 - \tfrac{1}{n})^m \end{aligned}$$

Question 4. En déduire le nombre de boîtes qu'il faut acheter pour avoir au moins 90 % de chance d'avoir cette carte.

Le collectionneur voudrait calculer le nombre de boîtes pour qu'il a au moins 90 % de chance d'avoir cette carte, c'est à dire quelle est la valeur de m pour que $Pr(\mathcal{C}) \geq 0.9$.

$$\begin{array}{lcl} Pr(\mathcal{C}) & \geq & 0.9 \\ (1-\frac{1}{n})^m & \leq & 0.1 \\ m & \leq & \frac{\log(0.1)}{\log(1-1/n)} \\ x \approx nlog10 & \leq & m \end{array}$$

Le collectionneur veut absolument toutes les cartes.

Soit $\mathcal{B}_i$ l'évènement qu'aucune des m premières boîtes achetées contiennent la carte numéro i.

Question 5. Soit $\mathcal{E}$ l'événement qui le collectionneur n'a pas pu obtenir toute la collection après l'achat de m boîtes. Définir l'événement $\mathcal{E}$ par rapport aux évènements $\mathcal{B}_i$? Quelle est la probabilité de $\mathcal{E}$?

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{E} & = & \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_n \\ Pr(\mathcal{E}) & \leq & Pr(\mathcal{B}_1) + Pr(\mathcal{B}_2) + \cdots + Pr(\mathcal{B}_n) \\ & \leq & n(1-\frac{1}{n})^m \end{array}$$

Question 6. Combien boîtes doit-on acheter pour avoir au moins 90 % de chance d'avoir toutes les cartes.

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{E} & \leq & 0.1 \\ n(1-\frac{1}{n})^m & \leq & 0.1 \end{array}$$

Donc $m \geq nlog(10n)$