# Théorie des games appliqué aux problèmes de routage.

Johanne Cohen

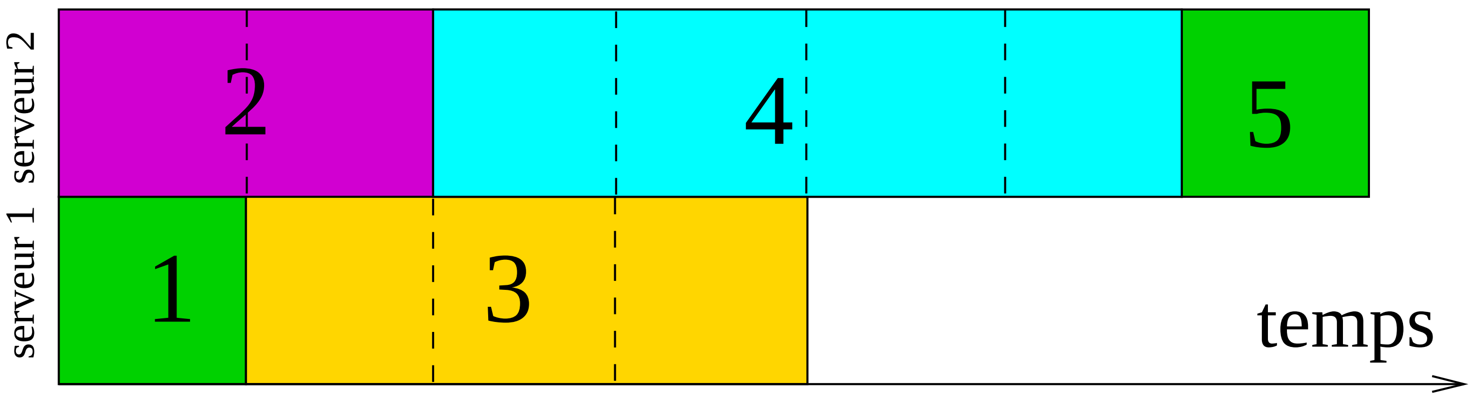
Johanne.Cohen@loria.fr

# Plan

1. Introduction à la théorie des jeux.
   (a) Définition d'un jeu
   (b) Définition d'un équilibre de Nash
   (c) Discussion sur l'existence d'un tel équilibre.
2. Problème d'allocation de tâches.
   (a) Définition sous forme d'un jeu.
   (b) Existence d'un équilibre de Nash
3. Congestion games: problème de routage.

# Exemple: allocation de tâche

- 2 serveurs, $5$ tâches, $\forall i \in \{1, 2\}, r_i(x) = x$
- Une affectation




$L_1 = 7$, $L_1 = 4$, et avec

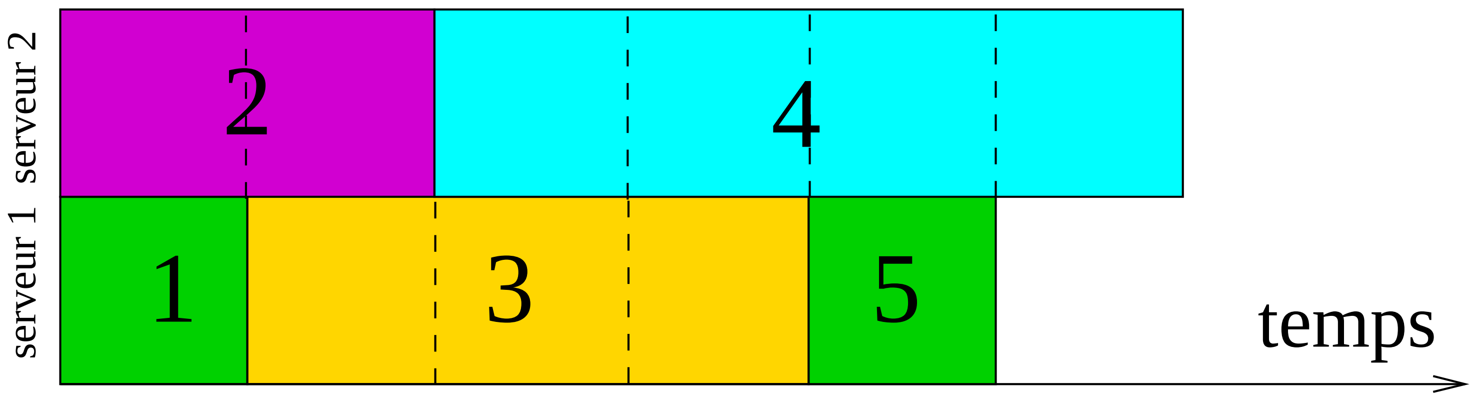
Une tâche peut-elle améliorer son utilité?

| tâche | utilité |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 3 | 4 |

| tâche | utilité |
|---|---|
| 2 | 7 |
| 4 | 7 |
| 5 | 7 |

# Exemple: allocation de tâche

- 2 serveurs, $5$ tâches, $\forall i \in \{1,2\}, r_i(x) = x$
- Une affectation




$L_1 = 7$, $L_1 = 4$, et avec

Une tâche peut-elle améliorer son utilité?

| tâche | utilité |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 3 | 4 |

| tâche | utilité |
|---|---|
| 2 | 7 |
| 4 | 7 |
| 5 | 7 |

# 1) Introduction à la théorie des jeux

1. Définition d’un jeu
2. Définition d’un équilibre de Nash
3. Discussion sur l’existence d’un tel équilibre.

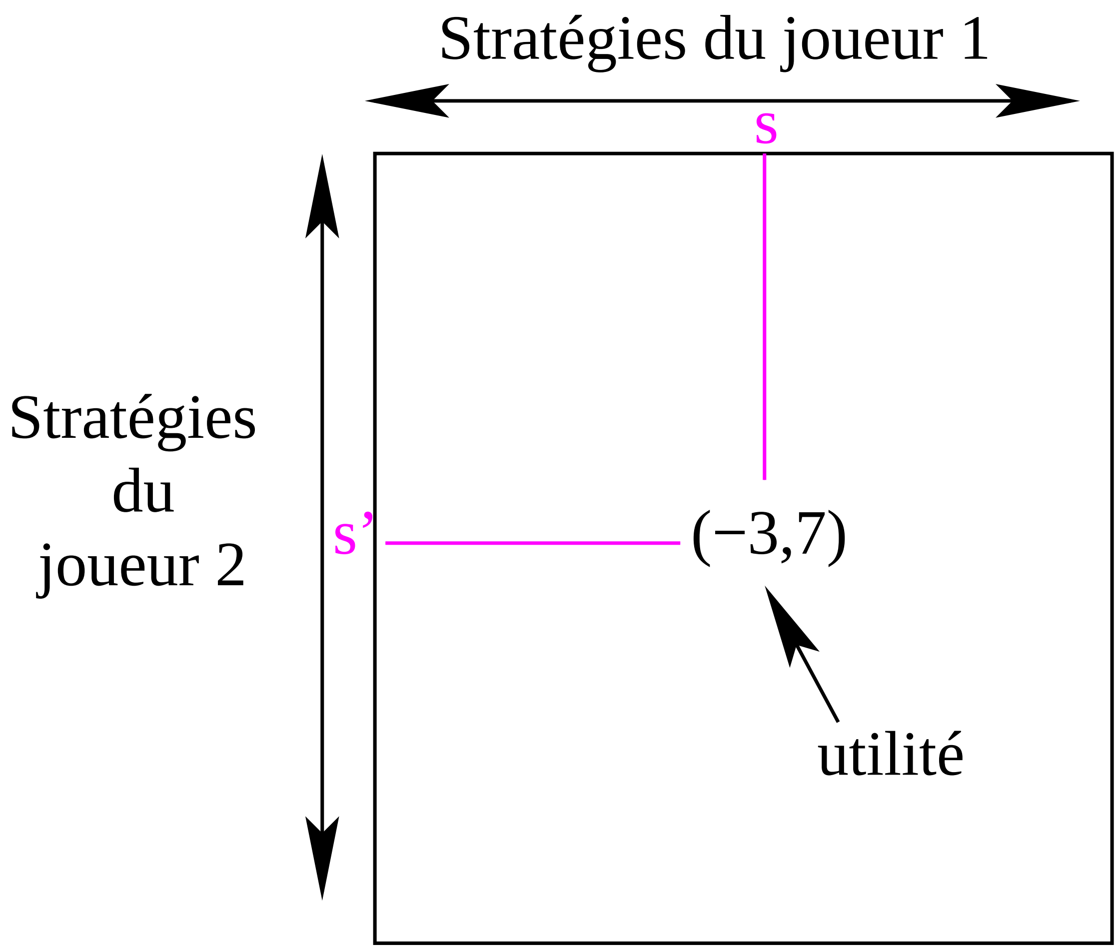
# Basket ou foot?

- Deux joueurs veulent jouer au basket ou au foot: mais ils ont des préférences:

| | | Joueur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | B | F |
| Joueur 1 | B | $(2,1)$ | $(0,0)$ |
| | F | $(0,0)$ | $(1,2)$ |

- 2 stratégies possibles: Soit choisir `Bascket (B)` ou soit choisir `Foot (F)`
- Une stratégie pure pour un joueur $i$ est un plan qui spécifie une action à chaque noeud où le joueur $i$ se verrait dans l'obligation de prendre en fonction de l'état du jeu.

# Visualisation du jeu: forme stratégique.




**Remarque:** Généralisation à plusieurs joueurs

# Le jeux avec $n \leq 2$ joueurs

Est

- un ensemble d'actions $S_i$ pour chaque joueur,
- une utilité $u_i$ pour chaque joueur: une fonction $S_1 \cdots S_n \to N$

Remarque:

- $s$ est un état (ensemble de stratégies) si $s \in S_1 \cdots S_n$
- $s^{-i}$ ensemble de stratégies de tous les joueurs sauf le joueur $i$
- $(s, s^{-i}) = (s_1, \ldots, s, \ldots, s_n)$, $(s', s^{-i}) = (s_1, \ldots, s', \ldots, s_n)$

# retour au jeu “Basket ou foot?”

| | | Joueur 2 | |
|---|---|---|---|
| | | B | F |
| Joueur 1 | B | $(2, 1)$ | $(0, 0)$ |
| | F | $(0, 0)$ | $(1, 2)$ |

- deux états interessants: $(\mathtt{B}, \mathtt{B})$ ou $(\mathtt{F}, \mathtt{F})$

Aucun joueur a interêt à changer sa stratégie.
$\Rightarrow$ Equilibre de Nash

# Equilibre de Nash

Soit un jeu tel que

- un ensemble d'actions $S_i$ pour chaque joueur,
- pour chaque joueur une utilité $u_i$: $S_1 \cdots S_n \rightarrow N$

Un équilibre de Nash (NE) est un état $s = (s_1, \cdots, s_n)$ tel que

$\forall i$, $\forall s'_i$ on a $u_i(s_1, \cdots, s_i, \cdots, s_n) \geq u_i(s_1, \cdots, s'_i, \cdots, s_n)$.

# **Jeu** *“Ciseaux/Papier/Caillou”*.

Modalité: $2$ joueurs doivent choisir entre *Ciseaux/Papier/Caillou*.
Forme stratégique:

| | Ciseaux | Papier | Caillou |
|---|---|---|---|
| Ciseaux | $(1,1)$ | $(0,2)$ | $(2,0)$ |
| Papier | $(2,0)$ | $(1,1)$ | $(0,2)$ |
| Caillou | $(0,2)$ | $(2,0)$ | $(1,1)$ |

- Ce jeu ne possède pas d’équilibre de Nash pur.
- Mais il possède un équilibre de Nash mixte.
  ($\forall i \in \{1,2\}\ p_i(Ciseaux) = p_i(Papier) = p_i(Caillou) = \frac{1}{3}$)

# Equilibre de Nash mixte

Soit un jeu tel que

- un ensemble d'actions $S_i$ pour chaque joueur,
- pour chaque joueur une utilité $u_i$: $S_1 \cdots S_n \rightarrow N$

Une stratégie mixte (NE) est une mesure de probabilité $p_i$ définie sur l'ensemble des stratégies pures du joueur $i$. ($P - i$ ens. des stratégies mixte du joueur $i$).

$$\forall i, \ \sum_{s \in S_i} p_i(s) = 1$$

Un équilibre de Nash mixte (NE) est un état $p^* = (p_1^*, \cdots, p_n^*)$ tel que

$$\forall i, \ \forall p_i' \in P_i \text{ on a } u_i(p_i^*, p_{-i}^*) \geq u_i(p_i', p_{-i}^*).$$

# Théorème de Nash

**Theoreme [Nash51]:** *Il existe un équilibre de Nash mixte dans tout jeu fini.*

# Le dilemme du prisonnier: énoncé

Deux criminels ayant commis ensemble un crime sont arrêtés. ils sont interrogés séparement: Ils ont deux stratégies `Avouer (A)`, ou `ne pas avouer (NA)`. L'offre de la police est la suivante:

1. Si un seul dénonce, alors il est rélaché et l'autre est condamné à 10 ans de prison.
2. Si aucun des deux n'avoue, alors condamnation de $1$ an
3. si vous avouez tous les 2, alors condamnation de $8$ ans

# Le dilemme du prisonnier

- 2 stratégies: Avouer (A), ou, ne pas avouer (NA).
- chiffre correspond au perte d'année de "liberté".

| | | Prisonnier 2 | |
|---|---|---|---|
| | | A | NA |
| Prisonnier 1 | A | $(-8, -8)$ | $(-10, 0)$ |
| | NA | $(0, -10)$ | $(-1, -1)$ |

- Etat le plus favorable $(NA, NA)$.
- Et pourtant l'équilibre de Nash: $(A, A)$.
- Mais que va choisir chacun criminel?

# Jeu de 2 firmes

2 firmes similaires veulent former un cartel: chaque firme $i$ propose une proportion $s_i$ qu'elle désire.

| | | firme 2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 0 | $1/2$ | 1 |
| | 0 | $(0,0)$ | $(0,1/2)$ | $(0,1)$ |
| firme 1 | $1/2$ | $(1/2,0)$ | $(1/2,1/2)$ | $(-1,-1)$ |
| | 1 | $(1,0)$ | $(-1,-1)$ | $(1,1)$ |

- 3 équilibres (incomparable) de Nash $(0,0)$, $(1/2,1/2)$, $(1,1)$
- Mais lequel choisir ?

# 2) Problème d'allocation de tâches.

1. Définition sous forme d'un jeu.
2. Existence d'un équilibre de Nash

# Allocation des tâches.

- $m$ machines (serveurs),
- $n$ tâches (égoistes) ayant pour temps d'exécution $\{w_1, \ldots, w_n\}$ et ayant un ensemble de choix de serveurs $S_j$ pour la tâche $j$.
- Charge $L_i$ d'un serveur $i$ = somme des tps d'exécution sur le serveur.
- Coût d'une tâche = charge d'un serveur l'hébergeant.

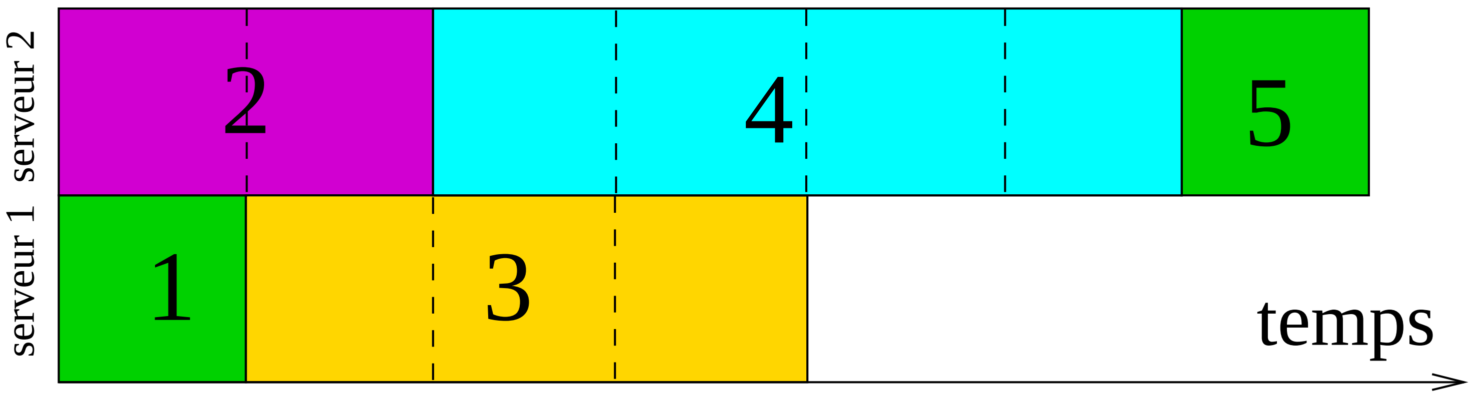
# Allocation des tâches.

- $1$ joueur = 1 tâche.
- L'ensemble des stratégies d'un joueur $j$ = l'ensemble des serveurs $S_j$ qui peut l'héberger.
- utilité d'un joueur $j$: $u_j(M) = L_i$ sachant que

  dans la configuration $M$, le joueur $j$ choisit d'être placé sur le serveur $i$.

# Exemple: allocation de tâche

- 2 serveurs, $5$ tâches,
- Une affectation $L_2 = 7$, $L_1 = 4$




- Utilité :

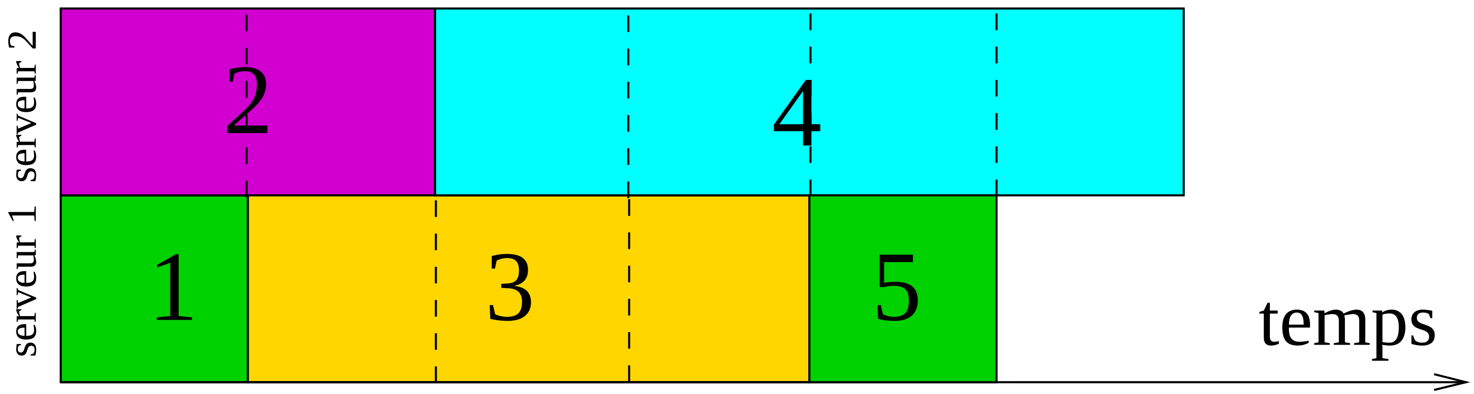
| tâche | utilité |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 3 | 4 |

| tâche | utilité |
|---|---|
| 2 | 7 |
| 4 | 7 |
| 5 | 7 |

- Une tâche peut-elle améliorer son utilité? OUI

# Exemple: allocation de tâche

- 2 serveurs, $5$ tâches,
- Une affectation $L_1 = 5$, $L_1 = 6$




- Utilité :

| tâche | utilité |
|---|---|
| 1 | 5 |
| 3 | 5 |
| 5 | 5 |

| tâche | utilité |
|---|---|
| 2 | 6 |
| 4 | 6 |

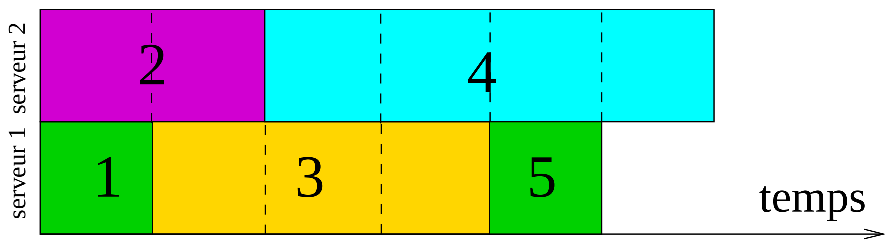
- Une tâche peut-elle améliorer son utilité? NON

# Equilibre de Nash dans ce contexte.

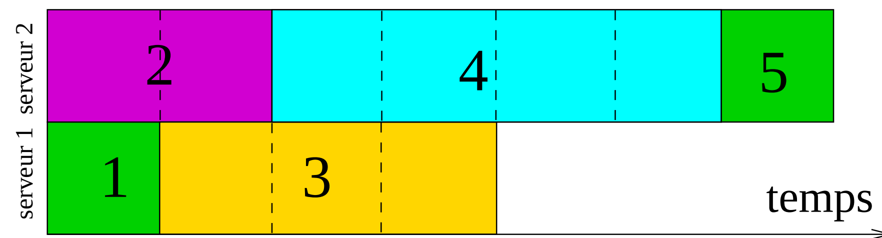
Une affectation de $n$ tâches est un équilibre de Nash si pour toutes les tâches $j$,

Si $j$ est affecté à la machine $i$, et
si $j$ peut être affecté à la machine $k$ alors,

$$L_i \leq L_k + m_j$$




Equilibre de Nash




$\neg$ Equilibre de Nash

# Existence d'un équilibre de Nash.

**Theoreme :** *Dans le jeu d'allocation, le jeu a un équilibre de Nash basé sur des stratégies pures.*

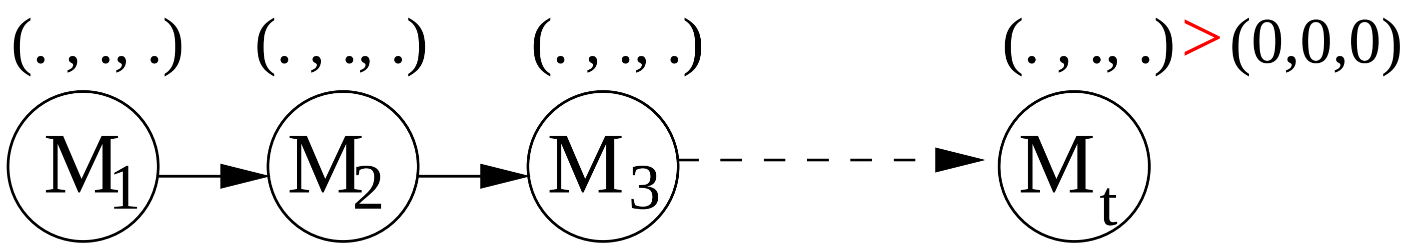
**Preuve**:

1. Soit $M$ une affectation et $\{(L_i)_i\}$ les tps de réponses.
2. $\bar{v}(M) = \{L_1, L_2, \ldots, L_m\}$ avec $L_1 \geq L_2 \geq \ldots \geq L_m$
3. Si la tâche $j$ veut migrer du serveur $i$ vers $k$, alors on est dans la situation
   - $L_i \searrow$ et $L_k \nearrow$
   - $k > i$.
   - $\bar{v}(M) > \bar{v}(M')$ avec $M' = M \oplus$ la tâche $i$ est hébergée par le serveur $k$.

$\square$

# Suite la preuve de l'$\exists$ d'un NE.

1. Soit $M$ une affectation, $r_1(L_1) \geq r_1(L_2) \geq \ldots \geq r_m(L_m)$
2. $t \leftarrow 1$ et $M_0 \leftarrow M$
3. Tant qu'$\exists$ une tâche $j$ veut migrer de $i$ vers $k$ dans $M_t$, faire
   (a) $M_{t+1} \leftarrow M_t \oplus$ déplacement de $j$ de $i$ vers $k$
   (b) $t \leftarrow t+1$
4. $M_t$ est un équilibre de Nash.

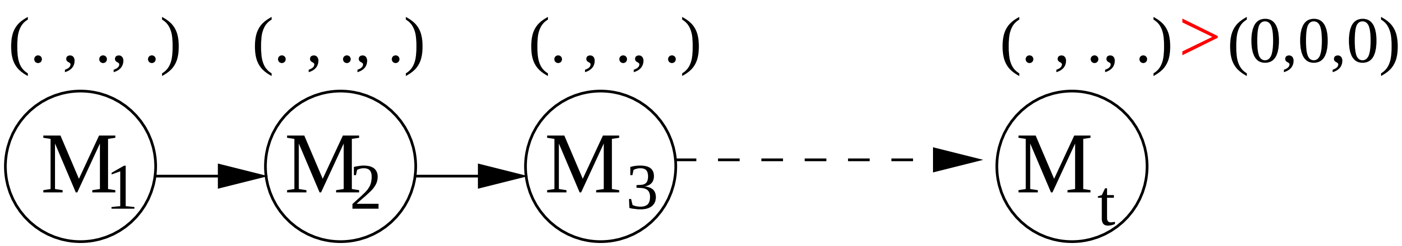


# Existence d'un équilibre de Nash.

**Theoreme :** *Dans le jeu d'allocation, le jeu a un équilibre de Nash basé sur des stratégies pures.*

**Preuve**:

1. Soit $M$ une affectation, $r_1(L_1) \geq r_1(L_2) \geq \ldots \geq r_m(L_m)$
2. L'algorithme, se termine-t-il ? Oui car




3. Il se termine mais en temps exponentiel.

$\square$

# Petite remarque

- $C_{max}(M) = \max_i(L_i)$ (temps de réponse le + long)
- Quel est le meilleur NE ?

**Theoreme :** *Le jeu a un NE tel que* $C_{max}(M) = \min\{C_{max}(M') : M' \; configuration\}$.

**Preuve**:

- Soit $M'$ une configuration telle que $C_{max}(M') = \min\{C_{max}(M') : M' \; configuration\}$
- Appliquer l'algorithme précédent sachant que toutes les changements de configurations n'augmentent pas $C_{max}$

$\square$

# Constatation: (1/2)

**Theoreme :** *Si toutes les tâches peuvent se placer sur n'importe quel serveur, alors*

$$\forall \textit{ NE } M,\ C_{max}(M) \leq 2C^*_{max}$$

*avec* $C^*_{max} = \min\{C_{max}(M') : M' \ configuration\}$

**Preuve**:

- Soit $M$ un NE ayant sa charge max sur le serveur $i$.
- Soit $j$ une tâche affectée sur la machine $i$.
- Si $j$ ne veut pas migrer sur un artre serveur alors $\forall k \in [m], L_i \leq L_k + w_k$
- Appliquer sur tous les serveurs $\sum_k L_k \geq m(L_i - w_k)$
- ........

$\square$

# Constatation: (2/2)

- $\sum_k L_k \geq m(L_i - w_j) \Rightarrow \frac{\sum_k L_k}{m} + w_j \geq L_i$
- $\forall$ affectation $M'$, $C_{max}(M') \geq w_j$ et $\sum_k L_k \geq \sum_h w_h$
- la charge moyenne $= \frac{\sum_h w_h}{m}$
- Donc $C^*_{max}$ $\geq$charge moyenne

  $C_{max}(M) = L_i \leq \frac{\sum_h w_h}{m} + w_j \leq C^*_{max} + C^*_{max}$

# Prix de l'anarchie

- Quand les joueurs concurrents partagent les ressources, les allocations de ressources sont loin de l'optimal,
- Mais de combien?

Prix de l'anarchie $= \max_{\texttt{quilibre de Nash } E} \frac{Cout(E)}{OPT}$

- Introduction de la notion d'un coût $Cout(E)$:

$$\text{Coût Social: } \begin{cases} \text{coût moyen des joueurs} \\ \text{coût maximum des joueurs} \\ \ldots \end{cases}$$

# Application sur le prob. d'allocation.

**Theoreme :** *Si toutes les tâches peuvent se placer sur n'importe quel serveur, alors*

$$\forall \textit{ NE } M,\ C_{max}(M) \leq 2C^*_{max}$$

*avec* $C^*_{max} = \min\{C_{max}(M') : M'\ configuration\}$

Dans ce contexte, le prix de l'anarchie est de $2$.

# 3) Congestion games: problème de routage.

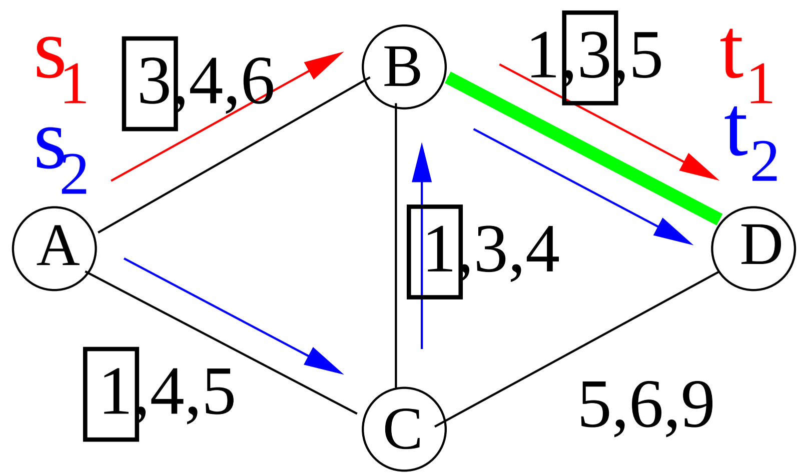
# Problématique du routage (atomique)

**Instance :**
$G = (V, E)$ un graphe orienté,
$k$ couples $(s_i, t_i) \in V^2$, pour $i \in [1, \ldots, k]$
$d_e(x)$= coût de l'arête $e$ si $x$ chemins la traversent.

**Objectif:** Trouver $k$ chemins $P_i$ reliant $s_i$ à $t_i$ sachant le coût d'un chemin $P$ est $\sum_{e \in P} d_e(f(e))$, où $f(e)$ est le nombre de chemins passant par $e$.

$c(P_1) = 3 + 3 = 6$

$c(P_2) = 1 + 1 + 3 = 5$



# Jeu de congestions réseau

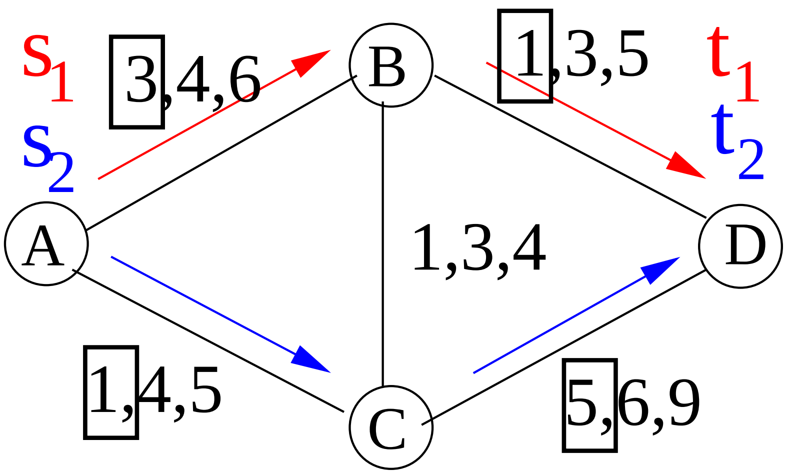
Jeu de congestions:

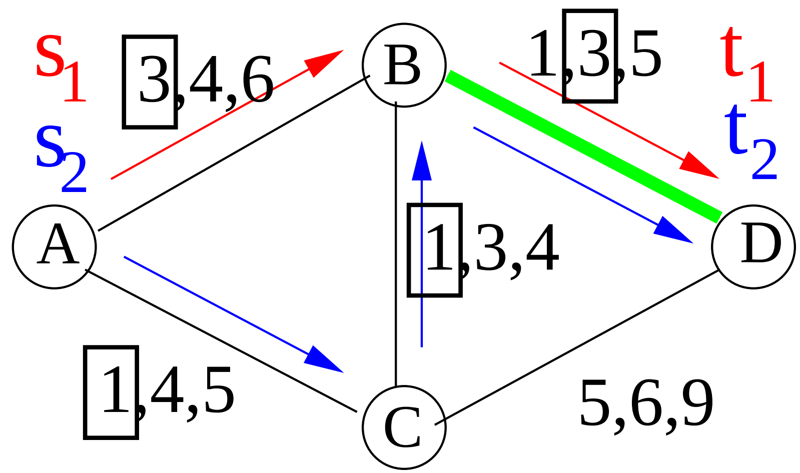
- Ensemble fini $E$ de ressources,
- Fct non-décroissante $d$ de coût: $d : E \times \{1, \ldots, n\} \to Z$,
- Ensemble de stratégies $S_i$ (sous-ensemble de $E$),
- Coût d'un joueur: $\sum_{e \in S_i} d_e(f_e(e))$.

Jeu de congestions réseau: (lié au problème de routage)

- Un joueur correspond à $(s_i, t_i)$.
- Stratégies pures: chemins entre $s_i$ et $t_i$.
- Objectif du joueur $i$: minimiser le coût de son chemin.

# Exemple de jeux de congestions.




$c(P_1) = 3 + 1 = 4$

$c(P_2) = 1 + 5 = 6$

N'est pas équilibre de Nash

$c(P_1) = 3 + 3 = 6$

$c(P_2) = 1 + 1 + 3 = 5$

Est équilibre de Nash

# Existence d'un Eq. de Nash

**Theoreme :** *Les jeux d'allocations ont au moins un équilibre de Nash pur.*

**Theoreme [Rosenthal73]:** *Les jeux de congestions ont au moins un équilibre de Nash pur.*

Preuve utilisant les jeux de potentiel.
Un jeu de potentiel est un jeu tel qu'il existe une fct de potentiel $\Phi$ sur l'ens. des configurations telle que:

> Si le joueur $i$ change de stratégie de $s$ vers $s'$ alors, $\Phi$ est modifiée de la même façon que l'utilité de $i$.
> $$\Phi(s', s^{-i}) - \Phi(s, s^{-i}) = u_i(s', s^{-i}) - u_i(s, s^{-i})$$

Notation: $(s, s^{-i}) = (s_1, \ldots, s, \ldots, s_n)$, $(s', s^{-i}) = (s_1, \ldots, s', \ldots, s_n)$

# Détermination de la fct de potentiel.

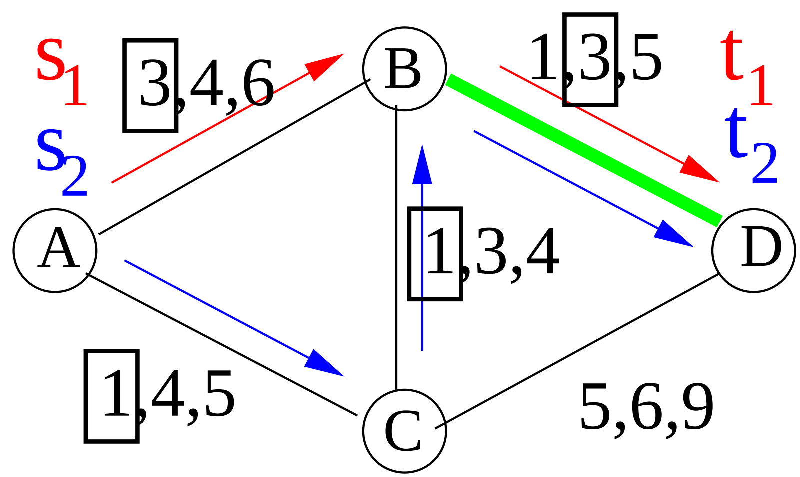
Dans les jeux de congestions réseau,

la fonction de potentiel: $\Phi(\mathcal{P}) = \sum_e \sum_{k=1}^{f(e)} d_e(k)$ avec $\mathcal{P}$ un ens. de chemins.

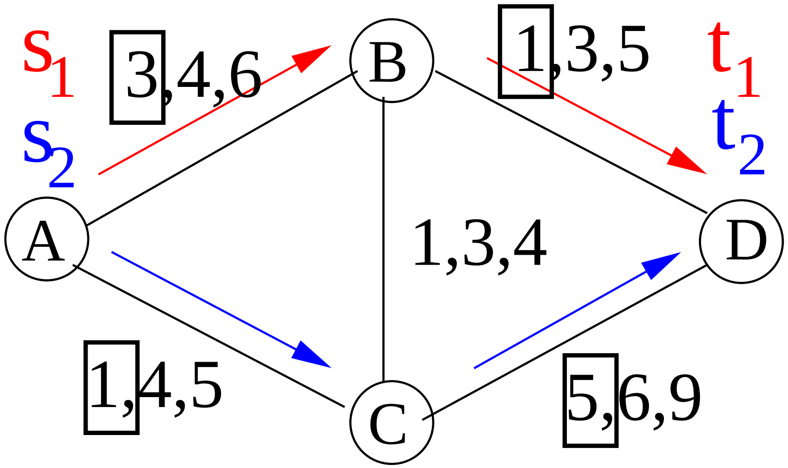
$$c(P_1) = 3 + 3 = 6$$

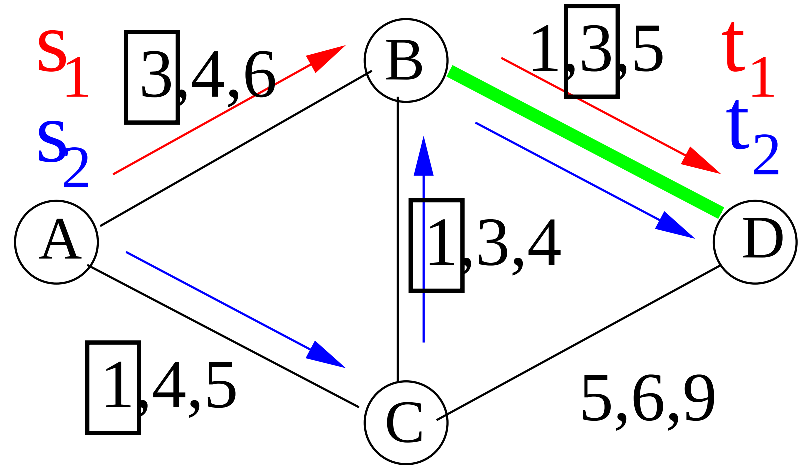
$$c(P_2) = 1 + 1 + 3 = 5$$

$$\phi(P_1, P_2) = 1 + 1 + 3 + 1 + 3$$



# Changement d'états.




$c(P_1) = 3 + 1$

$c(P_2) = 1 + 5 = 6$

$\phi(P_1, P_2) = 10$

$c(P_1) = 3 + 3$

$c(P_2') = 1 + 1 + 3 = 5$

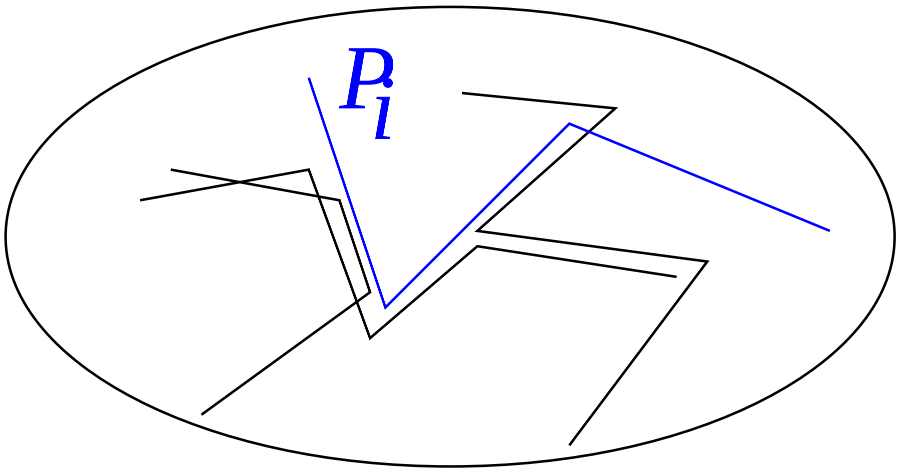
$\phi(P_1, P_2') = 5 + 1 + 3 = 9$

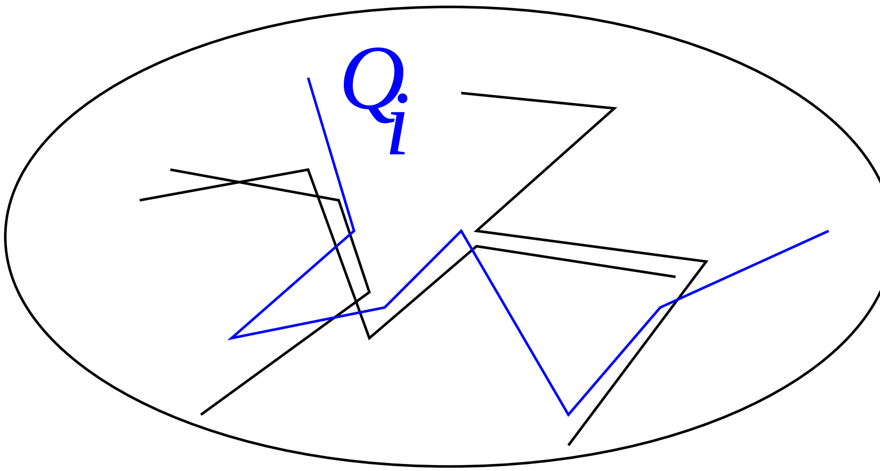
$$\phi(P_1, P_2) - \phi(P_1, P_2') = c(P_2) - c(P_2')$$

# Changement d'états

Si le joueur $i$ change de stratégie $P_i$ en $Q_i$,

son gain = $c(Q_i \backslash P_i) - c(P_i \backslash Q_i)$

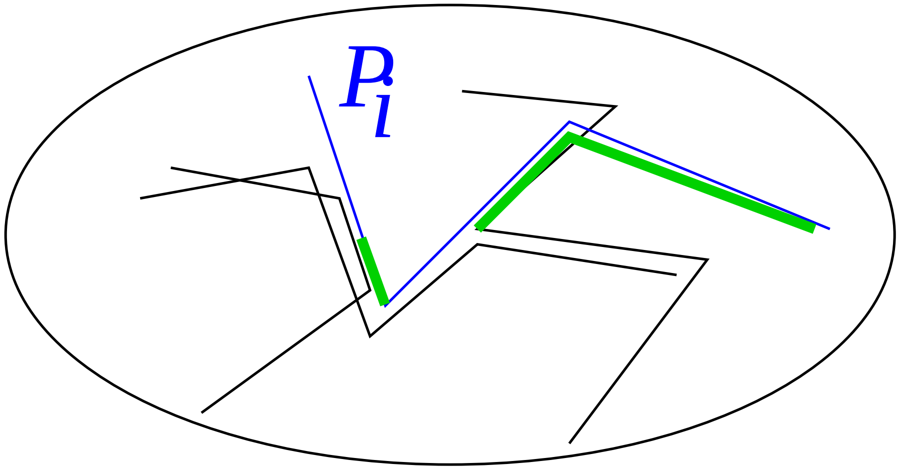


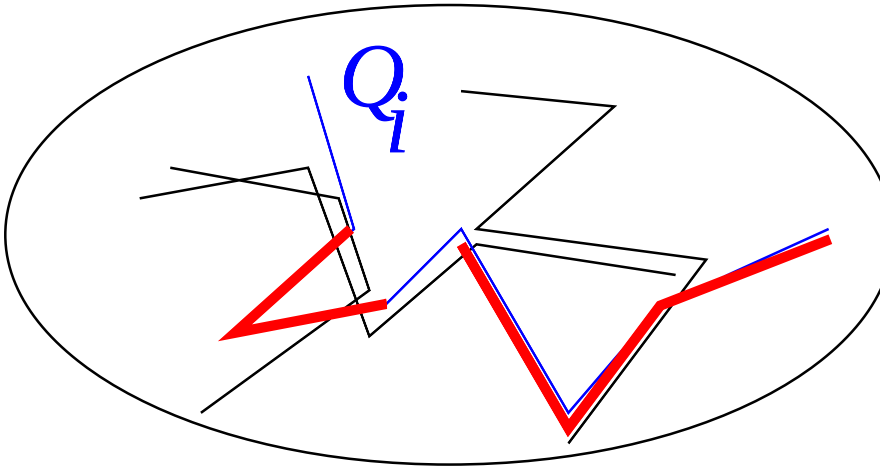



# Changement d'états

Si le joueur $i$ change de stratégie $P_i$ en $Q_i$,

son gain = $\phi(Q_i, P^{-i}) - \phi(P_i, P^{-i})$

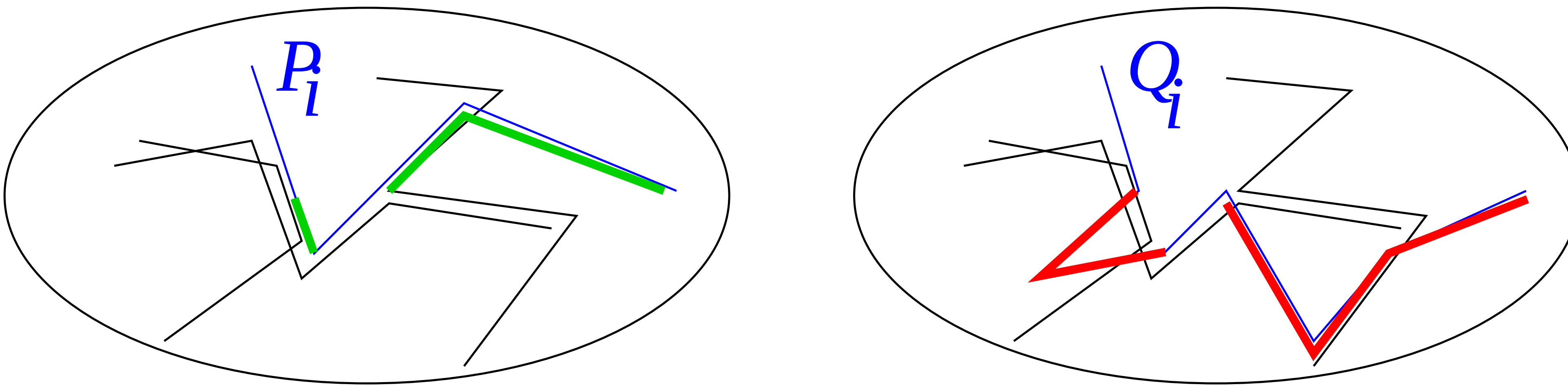


# Changement d'états

Si le joueur $i$ change de stratégie $P_i$ en $Q_i$,

son gain = $\phi(Q_i, P^{-i}) - \phi(P_i, P^{-i})$




Équilibre de Nash= $\forall i$, $i$ n'a pas intérêt à changer de stratégie $P_i$ en $Q_i$, car son gain est $\leq 0$ ($\phi(Q_i, P^{-i}) - \phi(P_i, P^{-i}) \leq 0$)

Conclusion: Minimum global de $\phi \Rightarrow$ Équilibre de Nash.

# Premiers résultats

**Theoreme [Rosenthal73]:** *Les jeux de congestions ont au moins un équilibre de Nash pur.*

Conséquence: Un équilibre de Nash peut être calculé par un algorithme pseudo-polynomial dans les jeux de congestions.

**Theoreme [MontererShapley91]:** *Les jeux de congestions sont équivalents aux jeux de potentiel.*

**Theoreme [Fabrikant, Papadimitriou, Talwar2004]:** *Calculer un équilibre dans les jeux de congestions réseau est* $PLS$*-complet.*

# La classe PLS: *Polynomial Local Search.*

Problème $\Pi$ dans $PLS$: problème d'optimisation $\Pi$ [Johnson, Papadimitriou, Yannakakis88]

- ayant comme objectif le calcul de minimums locaux $s$

  ($s$ est minimal sur le voisinage $\Gamma(s)$)
- avec $\Gamma$ calculable en tps polynomial.

$PLS$-Réduction de $\Pi_1$ vers $\Pi_2$ (dans $PLS$):

Transformation polynomiale d'une instance de $\Pi_1$ vers une de $\Pi_2$,

telle que les optimaux locaux sont préservés.

# La classe PLS (*Polynomial Local Search.*).

Problème NAE-SAT:

- Instance: ens. de clauses où chaque clause $c_i$ est pondérée par $w_i$.
- Mesure: la somme des poids de toutes les clauses satisfiables par l'affectation $s$ (telle que chaque clause n'a pas tous ses littéraux à la même valeur).
- Voisinage $\Gamma$ de $s$: les affectations qui diffèrent de $s$ par la modification de l'affectation d'une seule variable.

**Theoreme [Schaeffer,Yannakakis91]:** *Le problème NAE-SAT est PLS-complet.*

# Jeu de congestions symétriques

**Theoreme [Fabrikant, Papadimitriou, Talwar2004]:** *Dans les jeux de congestions réseau symétriques, un équilibre de Nash peut être trouvé en temps polynomial.*

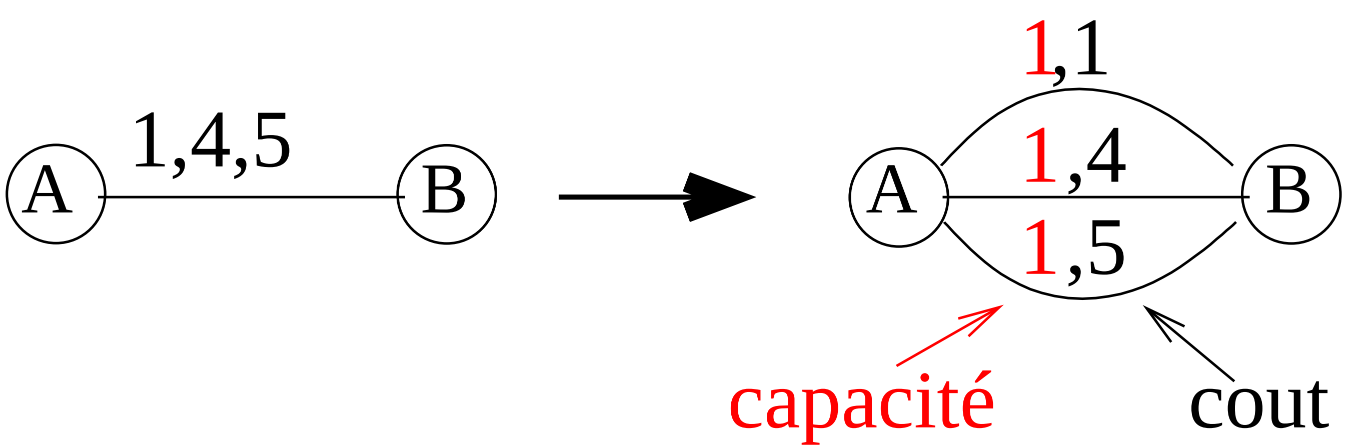
Jeu de congestions réseau symétriques= jeu de congestions réseau où tous les joueurs ont la même source et la même destination.

# Jeu de congestions symétriques

**Theoreme [Fabrikant, Papadimitriou, Talwar2004]:** *Dans les jeux de congestions réseau symétriques, un équilibre de Nash peut être trouvé en temps polynomial.*

**Preuve**:

- Transformation du graphe: duplication des arêtes. Une arête se transforme en $n$ arêtes de capacité $1$ et de coût $d_e(1), \ldots, d_e(n)$.



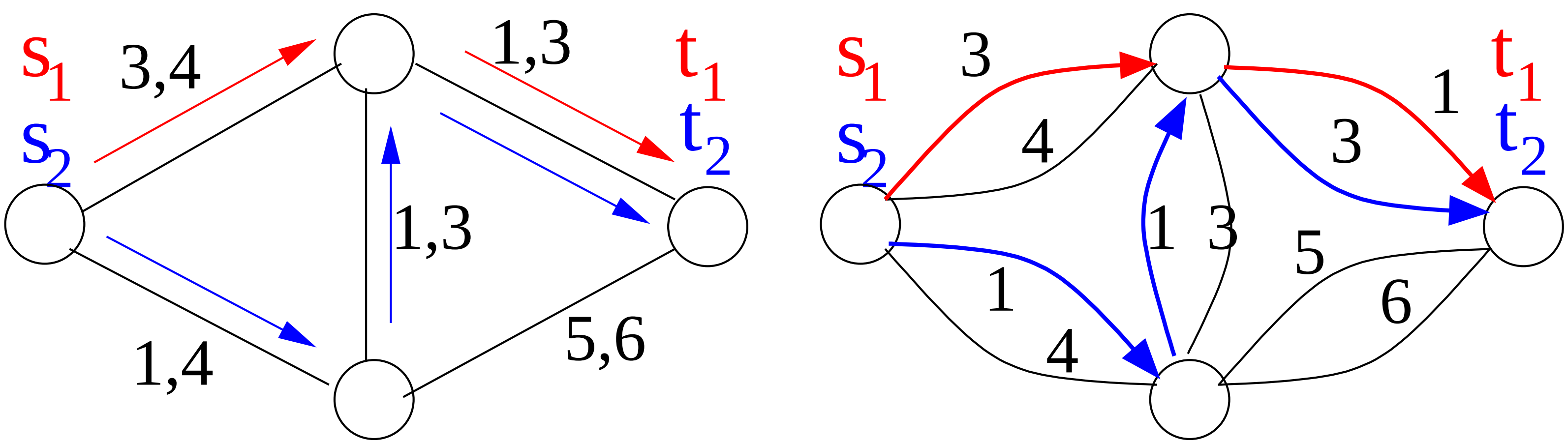

□

# Jeu de congestions symétriques

**Theoreme [Fabrikant, Papadimitriou, Talwar2004]:** *Dans les jeux de congestions réseau symétriques, un équilibre de Nash peut être trouvé en temps polynomial.*

**Preuve**:

- Transformation du graphe: duplication des arêtes.
- Flot entier max de coût minimum = solution minimisant $\phi$.




□

# Prix de l'anarchie

- Quand les joueurs concurrents partagent les ressources, les allocations de ressources sont loin de l'optimal,
- Mais de combien?

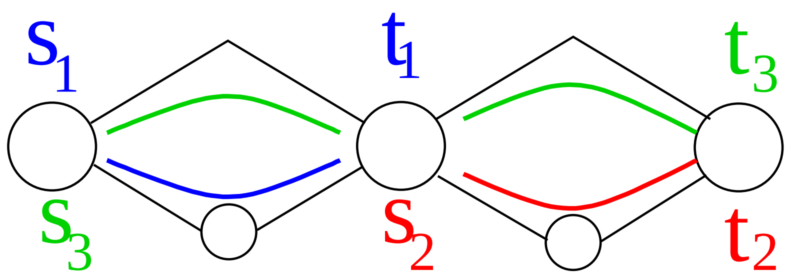
$$\text{Prix de l'anarchie} = \max_{\texttt{quilibre de Nash } E} \frac{Cout(E)}{OPT}$$

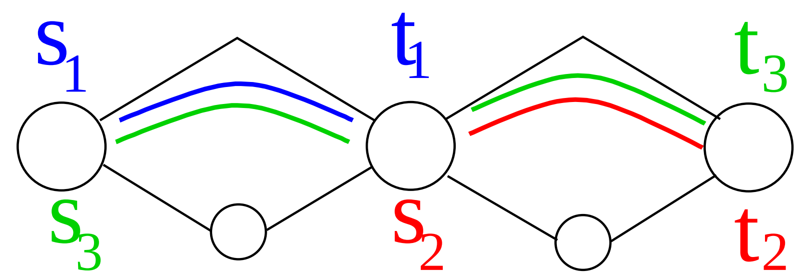
- Introduction de la notion d'un coût $Cout(E)$:

$$\text{Coût Social:} \begin{cases} \text{coût moyen des joueurs} \\ \text{coût maximum des joueurs} \\ \dots \end{cases}$$

# Exemple

Jeu de congestions où $cout(e) = \#$ de chemins traversant $e$:




Équilibre de Nash $2$,$2$,$2$ Équilibre de Nash $2$,$2$,$4$

- Pour le coût social = coût moyen des joueurs:

$$PA = \frac{2+2+4}{2+2+2} = \frac{4}{3}$$

- Pour le coût social = coût max des joueurs :

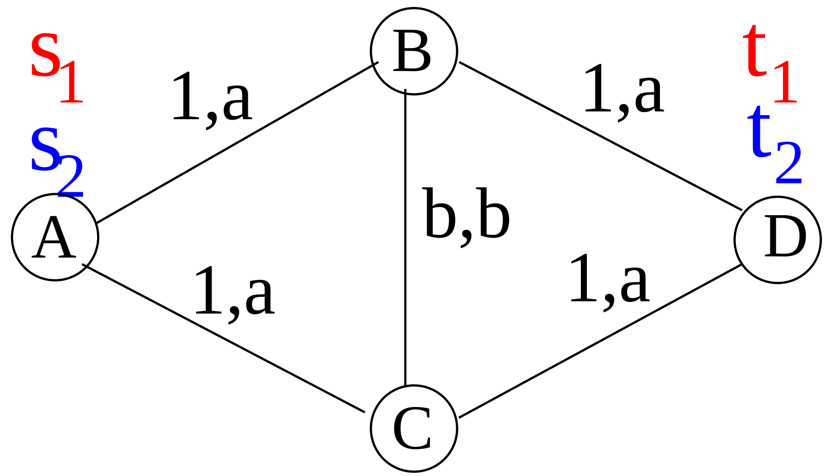
$$PA = \frac{4}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

# Prix de l'anarchie.

Jeu de congestions:

$a > 2b$

$b > 2$




Prix de l' anarchie: $1 + \frac{b}{2}$ non borné.

- $(ABCD, ACBD)$ est un équilibre de Nash et son coût social est $2 + b$.
- $(ABD, ACD)$ est un équilibre de Nash optimal et son coût social est $2$,

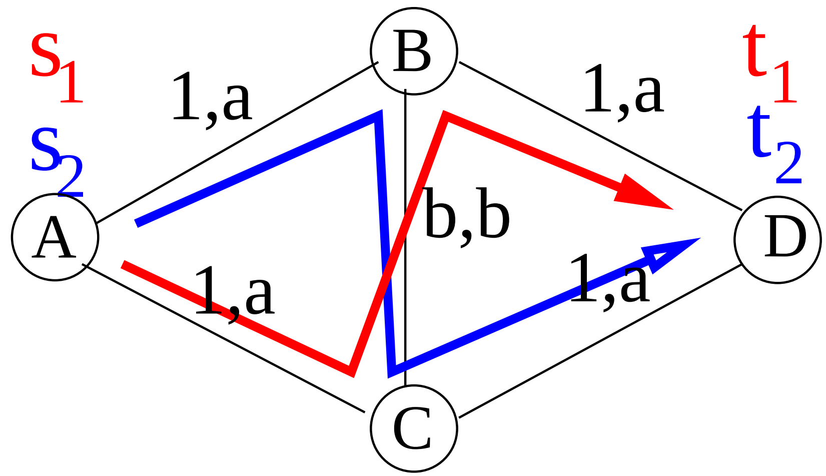
avec le coût social = coût max/moyen des joueurs.

# Prix de l'anarchie.

Jeu de congestions:

$$a > 2b$$

$$b > 2$$




Prix de l' anarchie: $1 + \frac{b}{2}$ non borné.

- $(ABCD, ACBD)$ est un équilibre de Nash et son coût social est $2 + b$.
- $(ABD, ACD)$ est un équilibre de Nash optimal et son coût social est $2$,

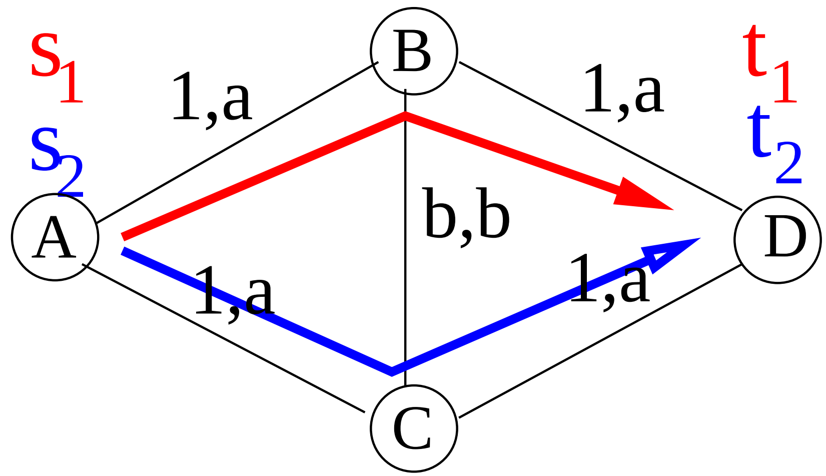
avec le coût social = coût max/moyen des joueurs.

# Prix de l'anarchie.

Jeu de congestions:

$a > 2b$

$b > 2$




Prix de l' anarchie: $1 + \frac{b}{2}$ non borné.

- $(ABCD, ACBD)$ est un équilibre de Nash et son coût social est $2 + b$.
- $(ABD, ACD)$ est un équilibre de Nash optimal et son coût social est $2$,

avec le coût social = coût max/moyen des joueurs.

# PA pour les jeux de congestion.

Les coûts des arêtes sont linéaires avec $n$ joueurs:

| | | Symétrique | Asymétrique |
|---|---|---|---|
| PUR | coût social moyen | $5/2$ | $5/2$ |
| PUR | coût social max | $5/2$ | $\sqrt{n}$ |
| MIXTE | coût social moyen | $\approx 2.618$ | $\approx 2.618$ |
| MIXTE | coût social max | $??$ | $??$ |

- 2004 Awerbuch & Azar & Epstein
- 2004: Gairing & Lucking & Mavronikolas & Monien
- 2004: Suri & Toth & Zhou
- 2005: Christodoulou & Koutsoupias

# PA pour les jeux d'allocations de tâches.

| | Machines Identiques | Modèle Général |
|---|---|---|
| Pur | $2 - \frac{1}{m}$ | $\Theta\left(\frac{\log m}{\log \log m}\right)$ |
| Mixte | $\Theta\left(\frac{\log m}{\log \log m}\right)$ | $\Theta\left(\frac{\log m}{\log \log \log m}\right)$ |

- 1999: Koutsoupias $\&$ Papadimitrious
- 2001: Mavronicolas $\&$ Sirakis
- 2002: Czumaj $\&$ Vöcking