Introduction à la théorie des jeux

Johanne Cohen

PRiSM/CNRS, Versailles, France.

Objectif de la présentation

Objectif de la présentation

est un équilibre de Nash.

Aujourd'hui

Jeu du pont (ou jeu de la poule mouillée)

- Définition
- Equilibre de Nash
- Equilibre de Nash mixte

Dilemme des prisonniers

Bonus

Plan

Jeu du pont

- Un pont à une voie
- Bob et Alice dans deux voitures séparés veulent passer sur un pont.

  2 choix s'imposent : $\left\{ \begin{array}{ll} 1. & \texttt{Passer.} \\ 2. & \texttt{Attendre.} \end{array} \right.$

Jeu du pont

- Un pont à une voie
- `Bob` et `Alice` dans deux voitures séparés veulent passer sur un pont.

$$\text{2 choix s'imposent : } \left\{ \begin{array}{ll} 1. & \texttt{Passer.} \\ 2. & \texttt{Attendre.} \end{array} \right.$$

- Tous les deux veulent minimiser le temps de transport.

Ils préfèrent `Passer` que d'`Attendre`.

les préférences = une fonction d'utilité U.

Modélisation.

1. Qui joue ?
2. Quelles actions/stratégies ?

3. Quel gain en fct du *profil des stratégies* ?

Modélisation.

1. Qui joue ? Alice et Bob
2. Quelles actions/stratégies ?
   `Passer` ou `Attendre`
3. Quel gain en fct du *profil des stratégies* ?
   fct d'utilité =le temps de transport

Modélisation.

1. Qui joue ? Alice et Bob
2. Quelles actions/stratégies ?
   `Passer` ou `Attendre`
3. Quel gain en fct du *profil des stratégies* ?
   fct d'utilité =le temps de transport

		Bob	
		`Passer`	`Attendre`
Alice	`Passer`		$(1, 2)$
	`Attendre`	$(2, 1)$	

Modélisation.

1. Qui joue ? Alice et Bob
2. Quelles actions/stratégies ?

   `Passer` ou `Attendre`
3. Quel gain en fct du *profil des stratégies* ?

   fct d'utilité =le temps de transport

Bob

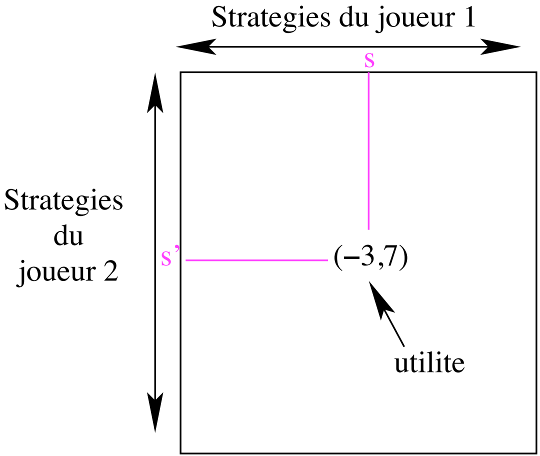
Alice	Passer	Attendre
Passer	$(60, 60)$	$(1, 2)$
Attendre	$(2, 1)$	

Modélisation.

1. Qui joue ? Alice et Bob
2. Quelles actions/stratégies ?
   `Passer` ou `Attendre`
3. Quel gain en fct du *profil des stratégies* ?
   fct d'utilité =le temps de transport

		Bob	
		`Passer`	`Attendre`
Alice	`Passer`	$(60, 60)$	$(1, 2)$
	`Attendre`	$(2, 1)$	$(5, 5)$

Visualisation du jeu :forme stratégique



Comportement rationnel

Comportement rationnel d'un joueur : choisir la stratégie qui lui est le plus favorable parmi un ensemble de stratégies.

Alice \ Bob	Passer	Attendre
Passer	$(60, 60)$	$(1, 2)$
Attendre	$(2, 1)$	$(5, 5)$

Par exemple :

1. Si Bob choisit de Passer, alors Alice choisira Attendre.
2. Si Bob choisit de Attendre, alors Alice choisira Passer.

Comportement rationnel

Comportement rationnel d'un joueur : choisir la stratégie qui lui est le plus favorable parmi un ensemble de stratégies.

		Bob	
		Passer	Attendre
Alice	Passer	$(60, 60)$	$(1, 2)$
	Attendre	$(2, 1)$	$(5, 5)$

Par exemple :

1. Si Bob choisit de Passer, alors Alice choisira Attendre.
2. Si Bob choisit de Attendre, alors Alice choisira Passer.

Alice a un comportement rationnel d'un joueur.

Soit s_{-i} : des stratégies des joueurs sauf du joueur i.

Meilleures réponses du joueur i par rapport à S_{-i}

$=$ les stratégies ayant la plus petite utilité

La meilleure réponse

Soit s_{-i} : des stratégies des joueurs sauf du joueur i.

Meilleures réponses du joueur i par rapport à S_{-i}

$=$ les stratégies ayant la plus petite utilité

$\boxed{\text{Équilibre} = \text{meilleures réponses mutuelles}}$

Equilibre de Nash

Soit un jeu tel que

- un ensemble d'actions S_i pour chaque joueur,
- pour chaque joueur une utilité $u_i : S_1 \times \cdots \times S_n \rightarrow N$

Un équilibre de Nash (NE) est un état $s = (s_1, \cdots, s_n)$ tel que

$$\forall i,\ \forall s_i' \text{ on a } u_i(s_1, \cdots, s_i, \cdots, s_n) \leq u_i(s_1, \cdots, s_i', \cdots, s_n).$$

Equilibre de Nash

Soit un jeu tel que

- un ensemble d'actions S_i pour chaque joueur,
- pour chaque joueur une utilité $u_i : S_1 \times \cdots \times S_n \rightarrow N$

Un équilibre de Nash (NE) est un état $s = (s_1, \cdots, s_n)$ tel que

$$\forall i,\ \forall s_i' \text{ on a } u_i(s_i, S_{-i}) \leq u_i(s_i', S_{-i}).$$

Retour à l'exemple

		Bob: Passer	Bob: Attendre
Alice	Passer	$(60, 60)$	$(1, 2)$
Alice	Attendre	$(2, 1)$	$(5, 5)$

- 2 équilibres de Nash :

  (`Passer`, `Attendre`) et (`Attendre`, `Passer`)

Retour à l'exemple

		Bob	
		`Passer`	`Attendre`
Alice	`Passer`	$(60, 60)$	$(1, 2)$
	`Attendre`	$(2, 1)$	$(5, 5)$

- 2 équilibres de Nash :

  (`Passer`, `Attendre`) et (`Attendre`, `Passer`)

- Mais lequel choisir ? Vers lequel le système va converger ?

Retour à l'exemple

		Bob	
		Passer	Attendre
Alice	Passer	$(60, 60)$	$(1, 2)$
	Attendre	$(2, 1)$	$(5, 5)$

- 2 équilibres de Nash :

  (Passer, Attendre) et (Attendre, Passer)

- Mais lequel choisir ? Vers lequel le système va converger ?

Une solution ! ! !

Jeu Ciseaux/Papier/Caillou

Modalité : 2 joueurs doivent choisir entre

`Ciseaux/Papier/Caillou`.

Forme stratégique :

	Ciseaux	Papier	Caillou
Ciseaux	$(0,0)$	$(-1,1)$	$(1,-1)$
Papier	$(1,-1)$	$(0,0)$	$(-1,1)$
Caillou	$(-1,1)$	$(1,-1)$	$(0,0)$

- Pas d'équilibre de Nash pur.

Jeu Ciseaux/Papier/Caillou

Modalité : 2 joueurs doivent choisir entre

`Ciseaux/Papier/Caillou`.

Forme stratégique :

	Ciseaux	Papier	Caillou
Ciseaux	$(0,0)$	$(-1,1)$	$(1,-1)$
Papier	$(1,-1)$	$(0,0)$	$(-1,1)$
Caillou	$(-1,1)$	$(1,-1)$	$(0,0)$

- Pas d'équilibre de Nash pur.
- Mais si les joueurs peuvent choisir les stratégies aléatoirement,
$$p_i(Ciseaux) + p_i(Papier) + p_i(Caillou) = 1$$

Jeu Ciseaux/Papier/Caillou

Modalité : 2 joueurs doivent choisir entre

`Ciseaux/Papier/Caillou`.

Forme stratégique :

	Ciseaux	Papier	Caillou
Ciseaux	$(0,0)$	$(-1,1)$	$(1,-1)$
Papier	$(1,-1)$	$(0,0)$	$(-1,1)$
Caillou	$(-1,1)$	$(1,-1)$	$(0,0)$

- Pas d'équilibre de Nash pur.
- Mais si les joueurs peuvent choisir les stratégies aléatoirement,

$$p_i(Ciseaux) + p_i(Papier) + p_i(Caillou) = 1$$

et si un des joueurs favorise une stratégie (Papier),
alors son adversaire favorise la stratégie gagnant (Ciseaux)

Jeu Ciseaux/Papier/Caillou

Modalité : 2 joueurs doivent choisir entre

`Ciseaux/Papier/Caillou`.

Forme stratégique :

	Ciseaux	Papier	Caillou
Ciseaux	$(0, 0)$	$(-1, 1)$	$(1, -1)$
Papier	$(1, -1)$	$(0, 0)$	$(-1, 1)$
Caillou	$(-1, 1)$	$(1, -1)$	$(0, 0)$

- Pas d'équilibre de Nash pur.
- Mais si les joueurs peuvent choisir les stratégies aléatoirement,
$$p_i(Ciseaux) + p_i(Papier) + p_i(Caillou) = 1$$
- Si les deux joueurs choisissent uniformement les 3 stratégies,
alors aucune amélioration de leur utilité.
un équilibre de Nash mixte.

Stratégie en utilisant des probabilités.

Soit un jeu n joueurs tel que chaque joueur i possède

- un ensemble d'actions S_i
- une utilité $u_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{N}$

Une stratégie mixte est une mesure de probabilité p_i définie sur l'ensemble des actions de i.

$$\forall i, \sum_{s \in S_i} p_i(s) = 1$$

Un profil p est un vecteur de n éléments $(p_1, \ldots, p_n)$ tel que i joue la stratégie mixte p_i.

Utilité d'une stratégie

Une utilité U_i de i avec p le profil du jeu est

$$U_i(p) = Eu_i(p)$$

		Bob	
		`Passer`	`Attendre`
Alice	`Passer`	$(60, 60)$	$(1, 2)$
	`Attendre`	$(2, 1)$	$(5, 5)$

Supposons

que le joueur Bob décide de `Passer` une fois sur trois,

que le joueur Alice décide de `Passer` une fois sur deux

$U_{Bob}(p_{Bob}, p_{Alice}) =$

Utilité d'une stratégie

Une utilité U_i de i avec p le profil du jeu est

$$U_i(p) = Eu_i(p)$$

		Bob	
		`Passer`	`Attendre`
Alice	`Passer`	$(60, 60)$	$(1, 2)$
	`Attendre`	$(2, 1)$	$(5, 5)$

Supposons

que le joueur Bob décide de `Passer` une fois sur trois,

que le joueur Alice décide de `Passer` une fois sur deux

$U_{Bob}(p_{Bob}, p_{Alice}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 60 +$

Utilité d'une stratégie

Une utilité U_i de i avec p le profil du jeu est

$$U_i(p) = Eu_i(p)$$

		Bob	
		`Passer`	`Attendre`
Alice	`Passer`	$(60, 60)$	$(1, 2)$
	`Attendre`	$(2, 1)$	$(5, 5)$

Supposons

que le joueur Bob décide de `Passer` une fois sur trois,

que le joueur Alice décide de `Passer` une fois sur deux

$$U_{Bob}(p_{Bob}, p_{Alice}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 60 + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times 5$$

Utilité d'une stratégie

Une utilité U_i de i avec p le profil du jeu est

$$U_i(p) = Eu_i(p)$$

		Bob	
		`Passer`	`Attendre`
Alice	`Passer`	$(60, 60)$	$(1, 2)$
	`Attendre`	$(2, 1)$	$(5, 5)$

Supposons

que le joueur Bob décide de `Passer` une fois sur trois,

que le joueur Alice décide de `Passer` une fois sur deux

$U_{Bob}(p_{Bob}, p_{Alice}) = \frac{75}{6}$

Meilleure réponse d'une stratégie mixte

		Bob	
		Passer	Attendre
Alice	Passer	$(60, 60)$	$(1, 2)$
	Attendre	$(2, 1)$	$(5, 5)$

Bob choisit $\begin{cases} \texttt{Passer} & \text{avec la probabilité } q \\ \texttt{Attendre} & \text{avec la probabilité } 1-q \end{cases}$

Quelle est la situation de Alice ?

Quand Alice doit-il choisir Passer ?

Meilleure réponse d'une stratégie mixte

		Bob	
		Passer	Attendre
Alice	Passer	$(60, 60)$	$(1, 2)$
	Attendre	$(2, 1)$	$(5, 5)$

Bob choisit $\begin{cases} \texttt{Passer} & \text{avec la probabilité } q \\ \texttt{Attendre} & \text{avec la probabilité } 1 - q \end{cases}$

Quelle est la situation de Alice ?

Si Alice choisit Passer, alors

espérance de son utilité $= 60q + 1(1 - q)$

Si Alice choisit Attendre, alors

espérance de son utilité $= 2q + 5(1 - q)$

Quand Alice doit-il choisir Passer ?

Meilleure réponse d'une stratégie mixte

		Bob	
		Passer	Attendre
Alice	Passer	$(60, 60)$	$(1, 2)$
	Attendre	$(2, 1)$	$(5, 5)$

Bob choisit $\begin{cases} \texttt{Passer} & \text{avec la probabilité } q \\ \texttt{Attendre} & \text{avec la probabilité } 1-q \end{cases}$

Quelle est la situation de Alice ?

Si Alice choisit Passer, alors

espérance de son utilité $= 60q + 1(1-q)$

Si Alice choisit Attendre, alors

espérance de son utilité $= 2q + 5(1-q)$

Quand Alice doit-il choisir Passer ?

Si $60q + 1(1-q) < 2q + 5(1-q)$, c'est-à-dire

Meilleure réponse d'une stratégie mixte

		Bob	
		Passer	Attendre
Alice	Passer	$(60, 60)$	$(1, 2)$
	Attendre	$(2, 1)$	$(5, 5)$

Bob choisit $\begin{cases} \texttt{Passer} & \text{avec la probabilité } q \\ \texttt{Attendre} & \text{avec la probabilité } 1-q \end{cases}$

Quelle est la situation de Alice ?

Si Alice choisit Passer, alors

$$\text{espérance de son utilité} = 60q + 1(1-q)$$

Si Alice choisit Attendre, alors

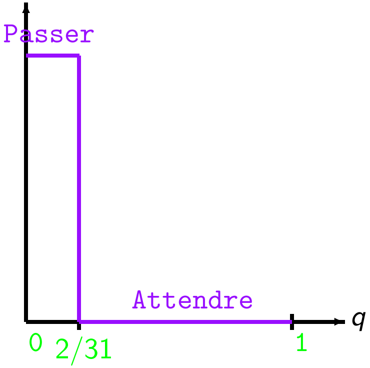
$$\text{espérance de son utilité} = 2q + 5(1-q)$$

Quand Alice doit-il choisir Passer ?

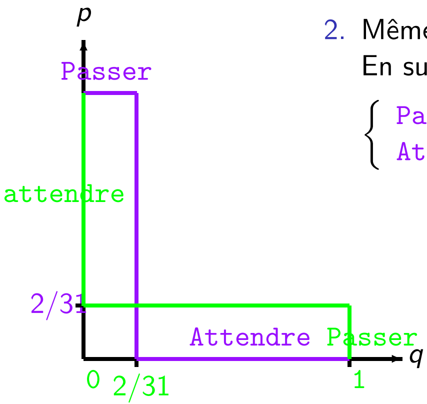
si $q < 2/31$

si le choix n'est pas déterministe...

1. Alice choisit Passer si $q < 2/31$



si le choix n'est pas déterministe...

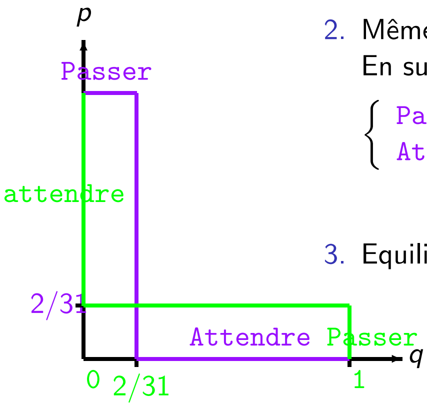


1. Alice choisit Passer si $q < 2/31$
2. Même raisonnement que précédement : En supposant que Alice choisit

$$\begin{cases} \texttt{Passer} & \text{avec la probabilité } p \\ \texttt{Attendre} & \text{avec la probabilité } 1-p \end{cases},$$

Bob choisit Passe si $p < 2/31$

si le choix n'est pas déterministe...

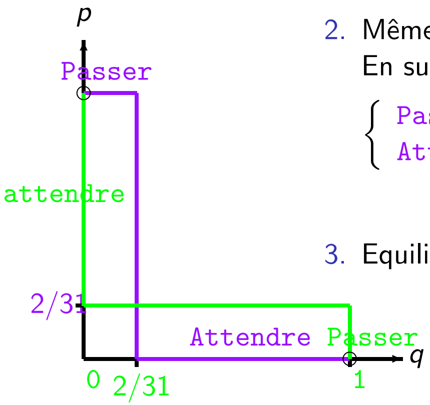


1. Alice choisit Passer si $q < 2/31$
2. Même raisonnement que précédement :
   En supposant que Alice choisit

   $$\begin{cases} \texttt{Passer} & \text{avec la probabilité } p \\ \texttt{Attendre} & \text{avec la probabilité } 1-p \end{cases},$$

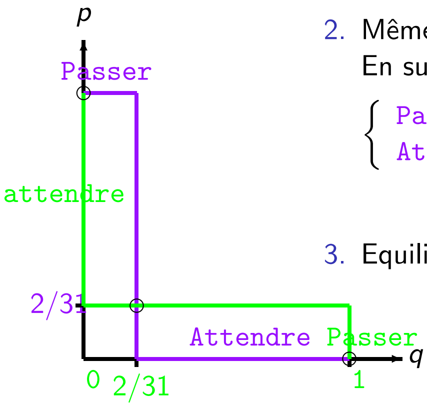
   Bob choisit Passe si $p < 2/31$
3. Equilibre de Nash $=$ intersection des courbes

si le choix n'est pas déterministe...



1. Alice choisit Passer si $q < 2/31$
2. Même raisonnement que précédement :
   En supposant que Alice choisit
   $$\begin{cases} \texttt{Passer} & \text{avec la probabilité } p \\ \texttt{Attendre} & \text{avec la probabilité } 1-p \end{cases},$$
   Bob choisit Passe si $p < 2/31$
3. Equilibre de Nash = intersection des courbes
   2 équilibres de Nash purs

si le choix n'est pas déterministe...



1. `Alice` choisit `Passer` si $q < 2/31$
2. Même raisonnement que précédement :
   En supposant que `Alice` choisit
   $$\begin{cases} \texttt{Passer} & \text{avec la probabilité } p \\ \texttt{Attendre} & \text{avec la probabilité } 1-p \end{cases},$$
   `Bob` choisit `Passe` si $p < 2/31$
3. Equilibre de Nash $=$ intersection des courbes

   2 équilibres de Nash purs

   1 équilibre de Nash mixte

Equilibre de Nash mixte

Soit un jeu n joueurs tel que chaque joueur i possède

- un ensemble d'actions S_i
- une utilité $u_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{N}$

Un équilibre de Nash mixte est un profil $p^* = (p_1^*, \cdots, p_n^*)$ tel que

$$\forall i,\ \forall p_i' \in \mathcal{P}_i \text{ on a } U_i(p_i^*, p_{-i}^*) \geq U_i(p_i', p_{-i}^*).$$

$\mathcal{P}_i$ l'ensemble des stratégies mixtes de i.

◂ retour sur l'exemple

Théorème de Nash

Théorème [Nash51]

Il existe un équilibre de Nash mixte dans tout jeu fini.

Rappel : tous les jeux ne possèdent pas d'équilibre de Nash pur.

Plan

Le dilemme du prisonnier : énoncé

`Bob` et `Alice` pour avoir commis ensemble un crime,
sont interrogés séparement.

L'offre de la police est la suivante :

1. Si un seul dénonce, alors
   il est relaché
   l'autre est condamné à 10 ans de prison.
2. Si aucun des deux n'avoue, alors condamnation de 1 an
3. si vous avouez tous les 2, alors condamnation de 8 ans

Ils ont deux stratégies : `Avouer` ou `Se taire`.

Forme stratégique

Deux stratégies : `Avouer A` ou `Se taire`.

		Bob	
		`Avouer`	`Se taire`
Alice	`Avouer`	$(8, 8)$	$(0, 10)$
	`Se taire`	$(10, 0)$	$(1, 1)$

- La stratégie `Avouer` domine la stratégie `Se taire`.

$$\forall s \in S_i \;\; u_i(s, S_{-i}) \geq u_i(\texttt{Avouer}, S_{-i})$$

Forme stratégique

Deux stratégies : `Avouer A` ou `Se taire`.

		Bob	
		`Avouer`	`Se taire`
Alice	`Avouer`	$(8, 8)$	$(0, 10)$
	`Se taire`	$(10, 0)$	$(1, 1)$

- La stratégie `Avouer` domine la stratégie `Se taire`.

$$\forall s \in S_i \;\; u_i(s, S_{-i}) \geq u_i(\texttt{Avouer}, S_{-i})$$

- (`Avouer`, `Avouer`) est un équilibre de Nash
- (`Se taire`, `Se taire`) est $\oplus$ favorable que (`Avouer`, `Avouer`)

Domination au sens de Pareto

		Bob	
		Avouer	Se taire
Alice	Avouer	$(8, 8)$	$(0, 8)$
	Se taire	$(8, 0)$	$(1, 1)$

Définition : Le profil $\hat{s}$ pareto-domine le profil s si

1. $\forall i, u_i(\hat{s}) \geq u_i(s)$,
2. $\exists j, u_j(\hat{s}) > u_j(s)$,

Remarque : (Se taire, Se taire) pareto-domine (Avouer, Avouer).

$\boxed{\text{Notion de coopération}}$

Définition : Le profil $\hat{s}$ pareto-domine le profil s si

1. $\forall i, u_i(\hat{s}) \geq u_i(s)$,
2. $\exists j, u_j(\hat{s}) > u_j(s)$,

Remarque : (`Se taire`, `Se taire`) pareto-domine (`Avouer`, `Avouer`).

Et si les jeux sont répétés ?

- en nombre fixé k de fois,
    - `Avouer` domine `Se taire` à l'étape k du jeu répété,
      les deux joueurs jouent donc `Avouer`.
    - même raisonnement pour l'avant-dernière étape,
    - les joueurs jouent `Avouer` aux temps $k, k-1, \cdots, 1$

Et si les jeux sont répétés ?

- en nombre fixé k de fois,
  - `Avouer` domine `Se taire` à l'étape k du jeu répété,
    les deux joueurs jouent donc `Avouer`.
  - même raisonnement pour l'avant-dernière étape,
  - les joueurs jouent `Avouer` aux temps $k, k-1, \cdots, 1$

Introduction d'une probabilité δ
que le jeu continue un étape de plus

Et si les jeux sont répétés ?

- en nombre fixé k de fois,
  - `Avouer` domine `Se taire` à l'étape k du jeu répété,
    les deux joueurs jouent donc `Avouer`.
  - même raisonnement pour l'avant-dernière étape,
  - les joueurs jouent `Avouer` aux temps $k, k-1, \cdots, 1$

Introduction d'une probabilité δ
que le jeu continue un étape de plus

- en une infinité de fois,
  - les stratégies = les stratégies mixtes dans le jeu statique.
  - Constrution d'une stratégie de comportement correspondant
    à une simulation de la stratégie mixte S
    et si un joueur i dévie, il est sanctionné.

Questions ?

Plan

Vers un apprentissage d'équilibre

- Le même jeu est répété à chaque étape.
- A chaque instant t, le joueur i est confronté ce problème :

  Quelle action jouée au temps t étant donnée l'histoire du jeu ?

  c'est-à-dire

  pour chaque joueur `i`, $v_i(t) = f(Q)$,

  où f_i une fonction qui détermine le comportement de `i` en fct du passé Q.

une dynamique : le joueur fictif

Le joueur est un joueur fictif si le joueur a le comportement suivant :

en fonction du passé, et de la statistique
des stratégies de ses adversaires,
le joueur jouera une meilleure réponse.

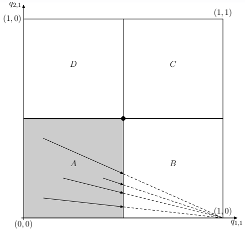
C'est-à-dire

Si le joueur 2 a utilisé n_i fois l'action numéro `i` entre le temps 1 et $t-1$, alors le joueur 1 estimera que le joueur 2 jouera au temps t l'action `i` avec probabilité $q_{2,i}(t) = n_i/(t-1)$.

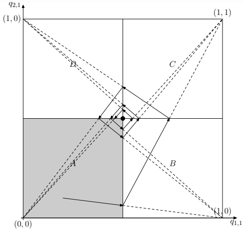
		joueur 2	
		1	2
joueur 1	1	(3,1)	(0,3)
	2	(1,2)	(2,0)

- Passage d'un temps discret à un temps continu
- Le système = le couple $(q_{1,1}, q_{2,1})$
  avec $q_{i,1}$ = probabilité que le joueur `i` joue la stratégie 1.

une dynamique : le joueur fictif



direction de la dynamique
dans la zone A



exemple de comportement
de la dynamique

Pour la Zone A :

- le joueur 1 voudra utiliser la stratégie pure 2, et le joueur 2 la stratégie pure 1.
- la dynamique $(q_{1,1}, q_{2,1})$ restera dans A jusqu'à l'instant $t + \tau$ pour $\tau > 0$ petit .

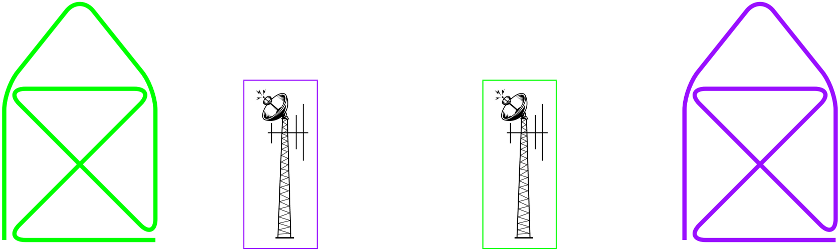
Donc $q_{2,1}(t+\tau) = \frac{tq_{2,1}(t)}{t+\tau}$. En faisant tendre $\tau \to 0$, on obtient

$$q'_{2,1}(t) = \frac{q_{2,1}(t)}{t}.$$

Questions ?

Questions ?

Dilemme des prisonniers ($c > 0$)



		J 2 transmettre	**J 2** $\overline{\text{transmettre}}$
J 1	transmettre	(1-c , 1-c)	(-c , 1)
J 1	$\overline{\text{transmettre}}$	(1 , -c)	(0 , 0)

Domination au sens de Pareto

		J 2	
		transmettre	$\overline{\text{transmettre}}$
J 1	transmettre	(1-c , 1-c)	(-c , 1)
	$\overline{\text{transmettre}}$	(1 , -c)	(0 , 0)

Remarque :

(transmettre,transmettre) est $\oplus$ favorable que ($\overline{\text{transmettre}}$,$\overline{\text{transmettre}}$).

Définition : Le profil $\hat{s}$ pareto-domine le profil s si

1. $\forall i, u_i(\hat{s}) \geq u_i(s)$,
2. $\exists j, u_j(\hat{s}) > u_j(s)$,

Notion de coopération

Remarque :

(`transmettre`,`transmettre`) est ⊕ favorable que ($\overline{\texttt{transmettre}}$,$\overline{\texttt{transmettre}}$).

Définition : Le profil $\hat{s}$ pareto-domine le profil s si

1. $\forall i, u_i(\hat{s}) \geq u_i(s)$,
2. $\exists j, u_j(\hat{s}) > u_j(s)$,

Questions ?