M2 Recherche COSY **2012**

Durée : 3 heures.

Partiel du module d'Algorithmique et Routage dans les réseaux de Télécommunications

Toutes les notes de cours sont autorisés. La qualité de la présentation de la copie sera prise en compte dans la notation.

Le partiel se décompose en deux parties. Vous utiliserez une copie pour chaque partie.

Exercice: Jeu de couverture

Soit U un ensemble d'éléments de n éléments. Soit $S = \{S_1, \ldots, S_k\}$ une collection de sous-ensembles de U, et une fonction de poids $w : S \rightarrow \mathbb{N}^+$.

Le problème de la couverture par ensemble est de trouver un sous-ensemble de S, de coût total minimum, qui couvre tous les éléments de U. Sous forme de jeu, ce problème peut s'exprimer de la façon suivante :

- chaque élément u de U est un joueur. La stratégie du joueur u est de choisir un ensemble s_u de S qui le couvre : $u \in s_u$ et $s_u \in S$.
- Si x éléments choisissent un même ensemble S_i alors chacun paye $w(S_i)/x$.
- Notons $\sigma = (s_1, \ldots, s_n)$ correspondant à un profil avec s_i la stratégie du joueur i.

Considérons l'exemple suivant :

- $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $S_1 = \{1, 3\}$, $S_2 = \{3, 4\}$, $S_3 = \{3, 5\}$, $S_4 = \{2, 3, 5\}$, $S_5 = \{1, 4\}$
- $w(S_1) = 5$, $w(S_2) = 3$, $w(S_3) = 8$, $w(S_4) = 6$, $w(S_5) = 4$

Considérons le profil suivant $\sigma_1 = (S_5, S_4, S_4, S_2, S_4)$. Le coût des joueurs 2, 3, 5 est de 2. Le coût du joueur 1 est de 4, et Le coût du joueur 4 est de 3

Question 1 : Le profil σ_1 est-il un équilibre de Nash ? Si oui, dites pourquoi si non, donnez un équilibre de Nash de ce jeu.

Question 2: Soit $\phi(\sigma) = \sum_{j=1}^{k} w(S_j)H(x_j)$ avec

- $\sigma = (s_1, \ldots, s_n)$, un profil du jeu avec s_i la stratégie du joueur i.
- $H : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction telle que $H(n) = 1/1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ et $H(0) = 0$.
- x_j, le nombre de joueurs qui ont choisit S_j dans σ

Calculer $\phi(\sigma_1)$.

Question 3: Montrer que le jeu de couverture est un jeu de potentiel.

Question 4: Qu'en déduisez-vous ?

Exercice sur les jeux de congestion étendus

Considérons le réseau correspondant à la figure 1 où n joueurs veulent faire transiter w_i unités d'information entre `AS 1` vers `AS 2`. Chaque arête dépend de la charge : $f(x) = 1 + 2x$ avec x correspondant à la charge de l'arête et le coût de transit d'un chemin correspond à la somme des coûts de transit de ses arêtes.

Ce jeu est une extention des jeux de congestions vu en cours. Tous les joueurs utilisent une seule route pour faire transiter toutes leurs informations.

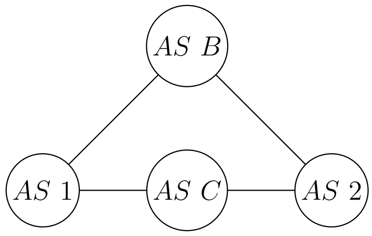

Figure 1: Description du réseau.

Question 1: Donner dans ce contexte la définition d'équilibre de Nash pur.

Considérons l'algorithme suivant :

1. Construire une liste triée des joueurs dans l'ordre décroissant en fonction de w_i.
2. Sélectionner la stratégie pour chaque joueur dans l'ordre de la liste telle que le coût de transit soit minimun à cet instant.

Question 2: Donner la configuration calculée par l'algorithme avec 6 joueurs avec $w_1 = 10$, $w_2 = 8$, $w_3 = 5$, $w_4 = 3$, $w_5 = 3$, $w_6 = 1$.

Question 3: Donner la compléxité de cet algorithme.

Question 4: Montrer par récurrence que cet algorithme calcule un équilibre de Nash pur.

Considérons maintenant le réseau correspondant à la figure 1 avec la même fonction de coût pour toutes les arêtes :$f(x) = x$. Nous allons étudier une fonction d'objectif que l'on appellera le coût social correspondant au maximun des coûts de chaque joueur.

Question 5: Montrer que pour tout jeu ayant 3 joueurs (avec les w_i quelconques), tous équilibres de Nash pur minimisent le coût social.

Question 6 Maintenant, le jeu est composé de x joueurs voulant faire transiter 1 unité d'information.

1. Caractériser les équilibres de Nash purs.
2. Donnez le coût social de chaque équilibre de Nash pur.