

Algorithmes d'approximation

Question 1. Cet exercice se focalise sur les graphes orientés acycliques. Le graphe **orienté acyclique** est un graphe ne possédant pas de circuit. Le graphe à gauche de la figure 1 donne un exemple. Nous notons $u \rightarrow v$ un arc allant de u vers v .

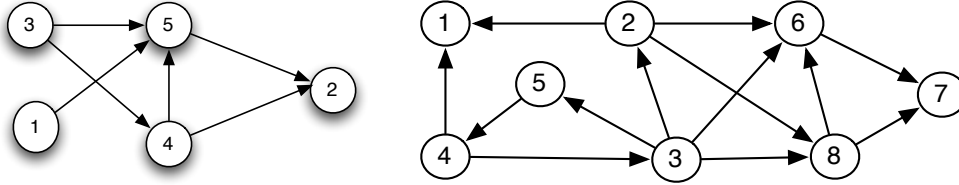


FIGURE 1 – Graphes orientés : il y a un arc de 4 vers 2 noté $(4 \rightarrow 2)$.

Nous allons considérer le problème de maximisation : trouver le sous-graphe acyclique le plus grand. Plus formellement,

Données : Un graphe orienté $G = (V, E)$.

Objectif : Trouver un sous-ensemble d'arcs $E' \subseteq E$ tel que le graphe $G' = (V, E')$ soit acyclique, tels que $|E'|$ soit le plus grand possible.

Considérons l'algorithme suivant :

1. Numéroté les sommets de manière arbitraire ;
2. $E_{\rightarrow} := \emptyset$ et $E_{\leftarrow} := \emptyset$;
3. Pour chaque arc $a = (u \rightarrow v)$ alors
 - (a) Si le numéro du sommet u est plus petit que celui de v ,
 alors $E_{\rightarrow} := E_{\rightarrow} \cup \{a\}$;
 sinon $E_{\leftarrow} := E_{\leftarrow} \cup \{a\}$;
4. si $|E_{\rightarrow}| \leq |E_{\leftarrow}|$, alors retourner $E_{\leftarrow}$ sinon retourner $E_{\rightarrow}$;

Question 1.1 Donner la complexité de cet algorithme.

Question 1.2 Appliquer cet algorithme sur les deux graphes de la figure 1 en utilisant la numérotation des sommets de cette figure.

Question 1.3 Donner la complexité de cet algorithme en nombre d'opérations.

Notons E^* la solution optimale (*i.e.* $G^* = (V, E^*)$ est le sous graphe acyclique de G contenant le plus d'arcs possibles) et $OPT = |E^*|$.

Question 1.4 Prouver que $\max(|E_{\rightarrow}|, |E_{\leftarrow}|) \geq OPT/2$

Question 1.5 Qu'en déduisez vous ?

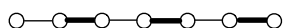
Question 2. Couplage dans un graphe

Soit un graphe $G = (V, E)$. Un **couplage** M est un ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes : $\forall \{u_1, u_2\}, \{v_1, v_2\} \in M, \{u_1, u_2\} \neq \{v_1, v_2\} \Rightarrow \{u_1, u_2\} \cap \{v_1, v_2\} = \emptyset$.

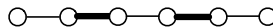
Un couplage **maximal** est un couplage M ayant la propriété que si une arête e est ajoutée, alors $M \cup \{e\}$ n'est pas un couplage. Un couplage **maximum** est un couplage contenant le plus grand nombre possible d'arêtes.

Notation : Soit M un couplage.

- Un chemin dans le graphe est dit **M -alternant** si ses arêtes sont alternativement dans M et hors de M (donc une arête sur deux est dans M).
- Un chemin **M -augmentant** est un chemin alternant dont les points de départ et d'arrivée sont deux sommets non couverts par M .

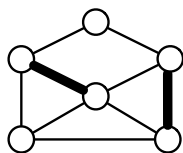


Ce chemin est M -alternant.

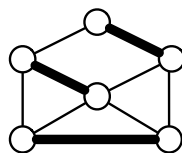


Ce chemin est M -augmentant de 5 arêtes.

FIGURE 2 – l'ensemble des arêtes épaisses forment le couplage M .



Couplage maximal



Couplage maximum

FIGURE 3 – Exemple de couplages : l'ensemble des arêtes épaisses forment le couplage.

Considérons l'algorithme glouton vu en cours :

Entrée : un graphe $G = (V, E)$

Sortie : un couplage M

1. $M \leftarrow \emptyset$;
2. Pour chaque arête e du graphe G
Si $M \cup \{e\}$ est un couplage alors $M \leftarrow M \cup \{e\}$;
3. Retourner M ;

Question 2.1 Montrer que si le graphe possède un chemin M -augmentant, alors M n'est pas maximum.

Soit M un couplage. Soit M^* correspondant à un couplage maximum.

Question 2.2 Montrer que toutes composantes connexes de $G' = (V, M \cup M^*)$ sont soit des chemins soit des cycles. Comparer le nombre d'arêtes de M et de M^* dans chaque composante connexe.

Question 2.3 Soit M un couplage tel qu'il n'existe aucun chemin M -augmentant de longueur 3. Montrer que $3|M| \geq 2|M^*|$. *Indication : raisonner sur $G' = (V, M \cup M^*)$.*

Question 2.4 Décrire un algorithme qui étant donné en entrée un graphe G , retourne un couplage M tel que $|M| \geq \frac{2}{3}|M^*|$. Donner la complexité de cet algorithme.

Question 2.5 Soit M un couplage tel que chaque chemin M -augmentant possède au moins $2k - 1 > 1$ arêtes. Montrer que $k|M| \geq (k - 1)|M^*|$. *Indication : raisonner sur G' .*

Question 2.6 Maintenant, nous considérons un graphe $G = (V, E)$ avec la fonction poids sur les arêtes $w : E \rightarrow \mathbb{N}$. Le **poids** d'un couplage M noté par $w(M)$ est la somme des poids de toutes les arêtes : $w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$. Nous notons le couplage M^* tel que $w(M^*) = \max\{w(M) : M \text{ est un couplage}\}$.

Transformer l'algorithme glouton qui retourne un couplage M tel que $2w(M) \geq w(M^*)$.