Probabilité, algorithmes probabilistes, algorithme On-line

Nous utiliserons une fonction $random(k)$ qui tire un entier entre 1 et k de façon uniforme.

Question 1. Soit T un tableau contenant n entiers qui est construit de façon uniforme.
Question 1.1 Donner la probabilité

1. que l'élément maximum soit à la position i.
2. que l'élément $T[i]$ soit le maximum du tableau $T[1,\ldots,i]$ du position i.

Question 1.2 Quelle est la position moyenne de l'élément maximum ?

Question 1.3 Donner la probabilité que $T[i] < T[j]$.

Question 1.4 Donner le nombre moyen d'inversion d'éléments dans un tableau T généré de façon aléatoire (inversion : $T[i] < T[j]$ si et seulement si $i > j$).

Question 2. La coupe maximum d'un graphe

Nous allons considérer un graphe non-orienté $G = (V, E)$ de n sommets. Soit A un sous-ensemble de sommets. Une ***coupe issue de*** A ***noté*** $\mathbf{c(A, B)}$ d'un graphe non-orienté $G = (V, E)$ est un ensemble d'arêtes qui partagent G en deux sous-ensembles disjoints et distincts (A et $B = V \setminus A$). Plus formellement, pour $B = V \setminus A$,

$$c(A, B) = \{(u, v) \in E \text{ tel que } u \in A,\ v \in B\}$$

Le ***poids*** de la coupe $c(A, B)$ ***noté*** $\mathbf{w(A, B)}$ est le nombre des arêtes de $c(A, B)$.

Question 2.1 Compter le nombre de coupes différentes dans un graphe complet de 4 sommets.

Question 2.2 Compter le nombre de coupes différentes dans G.

Question 2.3 Considérer l'algorithme suivant

Entrée : Un graphe $G = (V, E)$ et une fonction poids $w : E \to \mathbb{N}$
Sortie : Deux sous-ensembles de sommets A et B.

1. $A \leftarrow \emptyset$ et $B \leftarrow \emptyset$
2. pour tous les sommets v faire
   - $b \leftarrow random(2)$
   - si $b = 1$ alors $A \leftarrow A \setminus \{v\}$ sinon $B \leftarrow B \cup \{v\}$
3. Retourner les deux ensembles (A, B)

Question 2.4 Soit e une arête

1. Donner la probabilité que l'arête e a les deux sommets dans A.
2. Donner la probabilité que l'arête e sont dans la coupe.

Question 2.5 Donner le nombre moyen d'arêtes dans la coupe.

Question 2.6 Comparer le nombre moyen d'arêtes dans la coupe et la solution optimale.

Question 3. Une agence veut recruter un assistant. Il y a n candidats possibles. L'agence utilise la procedure suivante :
Entrée : n candidats

1. L'agence interviewe le candidat 1 et elle l'embauche
2. pour tous les sommets v faire
   (a) L'agence interviewe le candidat i
   (b) si le candidat i est meilleur que celui embauché alors
      i. L'agence renvoie le candidat embauché
      ii. elle embauche le candidat i

Il y a un coût pour interviewer (coût c_i) et pour embaucher (coût c_h).

Question 3.1 Donner le coût de la procédure au pire des cas, au meilleur des cas.

Question 3.2 Donner le coût moyen de la procédure.

Algorithme On-line et la location de skis.

Dans une station de sport d'hiver, une personne que l'on appellera Alice veut skier et elle n'a pas de matériel. Chaque jour, Alice a deux options : soit louer les skis pour 1 € par jour, soit acheter une paire de skis au prix de b € et les utiliser pour le reste de son séjour. Son objectif est de dépenser le moins possible pour avoir une paire de skis durant son séjour. Alice doit trouver une stratégie afin de minimiser ce coût.

Question 4. **Ici, Alice connaît la durée du séjour** d**.** Donnez un algorithme qui permet de dépenser le moins possible pour avoir une paire de ski durant ton son séjour. Donnez le coût en fonction que l'on notera $cout^*(d)$ de la durée du séjour ?

Il suffit de comparer la durée de séjour avec le coût d'achat et celui de louer le ski pendant d jours. Si $d > b$ alors Alice achète les skis, sinon elle les loue.

$$cout^*(d) = \begin{cases} b & if \quad d \geq b \\ d & sinon \end{cases}$$

Donc $cout^*(d) = \min(b, d)$

Alice ne connaît pas la durée du séjour. Donc, Alice ne sait pas combien de temps elle reste skier. Elle ne peut donc pas appliquer l'algorithme de la question 4.

Politique $\mathcal{A}_k$: Pour y remédier, elle fixe un entier k. Elle décide de louer les skis les k premiers jours et d'acheter les skis au $(k+1)$ème jour du séjour.

Question 5. Quel est le montant du coût que l'on notera $cout_{\mathcal{A}_k}(d)$ pour skier en fonction de la durée du séjour d et de k ?

$$cout_{\mathcal{A}_k}(d) = \begin{cases} b+k & si \quad d \geq k \\ d & sinon \end{cases}$$

Un **adversaire** que l'on appellera Bob décide de choisir la durée d en son séjour. De son coté, son objectif est qu'Alice dépense le plus possible pour utiliser son matériel de ski : formellement, son objectif est de trouver un d tel que le rapport $\frac{cout_{\mathcal{A}}(d)}{cout^*(d)}$ soit le plus grand possible. Pour cela, il choisit **la durée d du séjour d'Alice en connaissant la stratégie d'Alice**.

Question 6. Donner une expression du rapport $r(d) = \frac{cout_{\mathcal{A}_k}(d)}{cout^*(d)}$ entre les deux paramètres d et k. Qu'en déduisez sur le choix de la valeur de d de Bob ?

$$\frac{cout_{\mathcal{A}_k}(d)}{cout^*(d)} = \begin{cases} \frac{b+k}{\min(b,d)} & si \quad d > k \\ 1 = \frac{d}{d} & sinon \end{cases}$$

Nous étudions la fonction $r(d)$ en fonction de deux cas : $b \leq k$ et $b > k$. L'objectif est de trouver pour quelle valeur de d, $r(d)$ est le maximum.

1. Cas $b \leq k$:
   (a) Remarquons que $r(d) = 1$ si $1 \leq d \leq b$
   (b) Sinon nous sommes dans le cas $d > b$: $\min(b,d) = b$. Donc, on obtient $r(d) = \begin{cases} \frac{b+k}{b} = 1 + \frac{k}{b} & si \quad d > k \\ 1 = \frac{d}{d} & sinon \end{cases}$

   Pour que $r(d)$ soit maximum, il suffit que $d \geq k+1$.
2. Cas $b \geq k$:
   (a) De la même façon que le cas précédemment, on peut noter $r(d) = 1$ si $d \leq k$.
   (b) Si $d > k$, alors $r(d) = \frac{b+k}{\min(b,d)} = \begin{cases} \frac{b+k}{b} & si \quad d > b \\ \frac{b+k}{d} & si \quad d \leq b \end{cases}$

   Comme la fonction $\min(b,d)$ croît, alors la fonction $r(d)$ est une fonction décroissante. Comme $r(k+1) = \frac{b+k}{\min(b,k+1)} \geq 1$. Pour que $r(d)$ soit maximum il suffit que $d = k+1$.

Maintenant, c'est le tour d'Alice qu'elle veut minimiser l'impact de Bob : c'est-à-dire, elle veut minimiser le rapport $\frac{cout_{\mathcal{A}_k}(d)}{cout^*(d)}$.

Question 7. Quelle est la valeur de k qui minimise le rapport $\frac{cout_{\mathcal{A}_k}(d)}{cout^*(d)}$ (l'impact de Bob) ?

D'après la question précédente, comme Bob choisit d tel que $d = k+1$, alors le coût d'Alice est $cout_{\mathcal{A}_k}(d) = k+b$. Il suffit de minimiser la valeur $\frac{cout_{\mathcal{A}_k}(d)}{cout^*(d)}$ en fonction de k. Une analyse de la fonction $f(k) = \frac{b+k}{\min(b,k+1)}$ est nécessaire.

$$f(k) = \begin{cases} \frac{k+b}{k+1} & si \quad \min(b,k+1) = k+1 \\ \frac{k+b}{b} = 1 + \frac{k}{b} & si \quad \min(b,k+1) = b \end{cases}$$

Donc si $b > k+1$, $f(k) > 2$. Si $b < k+1$, $f(k)$ est décroissant et $f(b)$=2. Donc

$$b = k.$$