Probabilité et programmation dynamique

Nous utiliserons une fonction $random(k)$ qui tire un entier entre 1 et k de façon uniforme.

Génération d'une loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire qui peut prendre la valeur entière de 1 à n. Soit p un entier. Soit n entiers tel $x_1, \ldots, x_n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} x_i = p$. Fixons la loi de probabilité suivante : $Pr(X = i) = \frac{x_i}{p}$.

Question 1. Concevoir un algorithme qui permet de tirer une valeur aléatoire en fonction de cette loi de probabilité.

Génération aléatoire de tableau de n éléments

Une permutation des n premiers entiers est une bijection d'un ensemble des n premiers entiers sur lui-même. Par exemple, une permutation des 8 premiers éléments : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 8 & 5 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. Par simplification de notation, on la notera $< 3, 2, 6, 8, 5, 1, 4, 7 >$.

Question 2. Enumérer les permutations des 3 premiers entiers.

Question 3. Donner le nombre de permutations des n premiers entiers.

Question 4. Donner le nombre de permutations des n premiers entiers

1. dont le premier élément de la permutation est 1 ;
2. dont le premier (resp. second) élément de la permutation est 1 (resp. 2).

Question 5. Concevoir un algorithme qui tire une permutation parmi les permutations des n premiers entiers de façon uniforme. **Question 6**. Soit T un tableau contenant n entiers qui est construit de façon uniforme.

1. Donner la probabilité que l'élément minimum soit $T[1]$.
2. Donner la probabilité que l'élément maximum soit $T[2]$ en sachant l'élément minimum est $T[1]$.

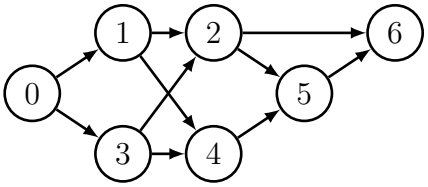
Question 7. Soit X un ensemble de n entiers. Concevoir un algorithme qui construit un tableau contenant tous les éléments de X de façon uniforme.

Génération aléatoire uniforme dans un graphe orienté et acyclique

Un graphe orienté $G = (V, A)$ est dit *acyclique* s'il vérifie la propriété suivante : il n'existe pas de cycle dans le graphe. Par la suite, nous supposerons par la suite que V sera numéroté de telle façon que $V = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ et chacun des arcs de G est de la forme $(u \to v)$ avec $u < v$.

Question 8. Dans les graphes suivants, donner (en les caractérisant) le nombre de chemins

1. entre les sommets 0 et 6 pour le graphe G_1



2. entre les sommets 0 et $n-1$ pour le graphe $G_2 = (V, A)$ tel que $V = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ et $A = \{(i \to j) : 0 \leq i < j \leq n-1\}$.

Notons par $nb[i]$ le nombre de chemins entre 0 au sommet i.

Question 9. Donner la formule de récurrence qui permet de calculer le nombre de chemins partant de 0 finissant par ℓ, $\ell = 1, \ldots, n-1$.

Question 10. Concevoir l'algorithme afin qu'il retourne, pour chaque sommet v du graphe, le nombre de chemin entre le sommet 0 et v.

Question 11. Evaluer la complexité de cet algorithme en considérant que le graphe est représenté par une *matrice d'adjacence*. La *matrice d'adjacence* du graphe G est une matrice M $n \times n$ telle que : $M[i,j] = \begin{cases} 1 & si \quad (i \to j) \in A \\ 0 & \quad sinon \end{cases}$.

Question 12. Concevoir l'algorithme qu'il retourne, pour chaque sommet v du graphe, le nombre de chemin entre le sommet v et $n-1$.

Question 13. L'objectif de cette question est de concevoir un algorithme qui il retourne un chemin tiré de façon uniforme permet de retourner parmi tous les chemins entre le sommet 0 et le sommet $n-1$.

Question 13.1 Considérons l'algorithme suivant :

1. Construire la liste de chemins entre le sommet 0 et le sommet $n-1$.
2. Soit k le nombre de chemin entre le sommet 0 et le sommet $n-1$.
3. Tirer un entier entre 1 et k de façon uniforme
4. retourner le $k$ième chemin de la liste.

La complexité de cet algorithme est-elle polynomiale ?

Question 13.2 Dans le graphe G_1, combien de chemin allant de 0 à $n-1$ passent par 1 ? Quelle est la probabilité que

1. que le chemin retourné par l'algorithme contienne le sommet 1 ?
2. que le chemin retourné par l'algorithme contienne le sommet 2 sachant que le sommet 1 est dans le chemin ?

Question 13.3 Concevoir l'algorithme qu'il retourne un chemin tiré de façon uniforme permet de retourner parmi tous les chemins entre le sommet 0 et le sommet $n-1$.