Exercice 1

Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E

1. Rappeller la définition de la différence symétrique.
2. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$, $A\Delta E$, et $A\Delta\bar{A}$
3. Montrer que, pour tous A, B, C sous-ensembles de E, on a
$$(A\Delta B) \cup C = (A \cup C)\Delta(B \cup C)$$

Exercice 2

Considérons le plan de métro de Paris. Soit M l'ensemble des stations de métro.

1. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $M \times M$ suivante définie : Soit x et y deux stations de métro. on a $x\mathcal{R}y$ si et seulement si x et y sont sur la même ligne. Quelles sont les propriétés de $\mathcal{R}$?
2. Soit $\mathcal{F}$ la relation sur $M \times M$ suivante définie : Soit x et y deux stations de métro. on a $x\mathcal{F}y$ si et seulement si un passagé peut aller de x vers y en métro. Quelles sont les propriétés de $\mathcal{F}$?

Exercice 3

Considérons un ensemble E défini de la façon suivante $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

1. Considérons la loi interne $\otimes : E \to E$ définie de façon suivante :
$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac, bd)$$
   (a) La loi interne est-elle associative, commutative ?
   (b) A-t-elle un élement neutre ?
   (c) Pour tout $(a, b) \in E$, existe-t-il un élément inverse de (a, b) pour la loi $\otimes$?
   (d) Qu'en déduisez-vous ?
2. Posons $f : E \to E$ une application telle que pour tout élément $x = (a, b)$ de E, on a $f(x) = y$ tel que $y = (a^2, b^2)$
   – Cette fonction est-elle injective, surjective, bijective ?
   – Montrer pour tout paire x, y d'éléments de E, on a $f(x) \otimes f(y) = f(x \otimes y)$
3. Posons $g : E \to E$ une application telle que pour tout élément $x = (a, b)$ de E, on a $g(x) = y$ tel que $y = (a + 1, b)$
   – Cette fonction est-elle injective, surjective, bijective ¿
   – A-t-on $f(x) \otimes f(y) = f(x \otimes y)$?

Exercice 4

Soit k un entier. S_k l'ensemble des entiers compris entre 0 et $2^k - 1$.
Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence de $S_k \times S_k$ définit de la façon suivante : on a $x\mathcal{R}y$ si et seulement si le nombre de bits de la représentation binaire x est égale au nombre de bits de la représentation binaire y.

– Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
– A partir des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$, construire une partition de S_K. (Il faut justifier que votre construction est bien une partition).

Exercice 5

Considérons la permutation suivante : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 8 & 5 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

Question 2.1 : Trouver la décomposition en produit de cycles disjoints de cette permutation.

Question 2.2 : Calculer la permutation σ^2 consistant à composer deux fois la permutation σ

Question 2.3 : Calculer la permutation que l'on notera σ^α consistant à composer α fois la permutation σ avec $\alpha \geq 1$.

Exercice 6

Nous considérons des pièces de monaies de 1, 2, 5 centimes. Notons $N(x)$, le nombre minimun de pièces pour obtenir x centimes

1. Quelle est la valeur de $N(0)$, $N(1)$, $N(2)$, $N(3)$, $N(4)$, $N(5)$?
2. Trouver la relation sous forme mathématique de $N(x)$ en fonction de valeurs $N(w)$ avec $w < x$.
3. Prouver cette formule par induction/récurrence sur x.