Exercice 1

Considérons un ensemble E défini de la façon suivante $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Question 1.1 : Considérons la relation $\mathcal{R}$ de $E \times R$ définie de façon suivante : $(a, b)\mathcal{R}(c, d)$ si et seulement si $ad = bc$. Est-elle reflexive, symétrique, anti-symétrique transitive ? Est-elle un ordre, ou une relation d'équivalence ?

Question 1.2 : Considérons la loi interne $\oplus : E$ définie de façon suivante :

$$(a, b) \oplus (c, d) = (ad + cb, bd)$$

1. La loi interne est-elle associative, commutative ?
2. Calculer $(a, b) \oplus (0, 1)$ pour tout $(a, b) \in E$? Qu'en déduisez-vous ?
3. Pour tout $(a, b) \in E$, existe-t-il un élément inverse de (a, b) pour la loi $\oplus$?
4. Qu'en déduisez-vous ?

Question 1.3 : Montrer que pour $\big((a, b), (c, d), (e, f)\big) \in E^3$

$$\text{si } (a, b)\mathcal{R}(c, d) \text{ alors } \big((a, b) \oplus (e, f)\big)\mathcal{R}\big((c, d) \oplus (e, f)\big)$$

Exercice 2

Considérons la permutation suivante : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 1 & 8 & 5 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

Question 2.1 : Trouver la décomposition en produit de cycles disjoints de cette permutation.

Question 2.2 : Calculer la permutation σ^2 consistant à composer deux fois la permutation σ

Question 2.3 : Calculer la permutation que l'on notera σ^α consistant à composer α fois la permutation σ avec $\alpha \geq 1$.

Question 2.4 : Répondre aux questions 2.2 et 2.3 en considérant la permutation

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 2 & 5 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Considérons la fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(a) = ac$ avec $c \in \mathbb{Z}$

Question 3.1 :

1. Pour quelle(s) valeur(s) de c la fonction f est-elle injective ?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de c la fonction f est-elle surjective ?
3. Pour quelle(s) valeur(s) de c la fonction f est-elle bijective ?

Question 3.2 : Pour cette question, nous nous plaçons dans le groupe $(\mathbb{Z}, \times)$

Pour quelle(s) valeur(s) de c la fonction f est-elle morphisme ?

Question 3.3 : Pour cette question, nous nous plaçons dans le groupe $(\mathbb{Z}, +)$

Pour quelle(s) valeur(s) de c la fonction f est-elle morphisme ?

Exercice 4

Question 4.1 : Montrer par récurrence qu'il faut au plus k bits pour coder en binaire les entiers entre 0 et $2^k - 1$.

Question 4.2 : Quelle est la représentation binaire de l'entier *23* ?

Question 4.3 : Trouver la relation sous forme mathématique entre la représentation binaire n et celle de l'entier $\lfloor n/2 \rfloor$

Question 4.4 : En déduire un algorithme qui calcule la représentation binaire d'un entier.

Exercice 5

Soit $E = \{1, 2, \ldots, 10\}$

Question 5.1 : Construire un exemple oMontrer par récurrence qu'il faut au plus k bits pour coder en binaire les entiers entre 0 et $2^k - 1$.

Question 4.2 : Quelle est la représentation binaire de l'entier *23* ?

Question 4.3 : Trouver la relation sous forme mathématique entre la représentation binaire n et celle de l'entier $\lfloor n/2 \rfloor$

Question 4.4 : En déduire un algorithme qui calcule la représentation binaire d'un entier.