

**Exercice 1**

Une grenouille peut monter le long d'un escalier en faisant des bonds d'une ou de deux marches à la fois.

1. Quel est le nombre minimum de bonds pour monter un escalier de 9 marches? De  $n$  marches?
2. Combien y a-t-il de manières pour cette grenouille de monter un escalier de 9 marches? De  $n$  marches?

**Exercice 2**

Soient les deux fonctions suivantes :

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$x \mapsto x+1 \quad y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y=0 \\ y-1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

1.  $f$  et  $g$  sont-elles surjectives, injectives, bijectives?
2. Que peut-on dire de  $(f \circ g)$  et  $(g \circ f)$ ?

**Exercice 3**

Soit  $E$  un ensemble fini.

1. Soit  $\mathcal{P}$  une partition de  $E$ . Posons que  $\mathcal{F}$  est relation de  $E \times E$  telle que pour tout  $(x, y) \in E^2$ , on a  $x\mathcal{F}y$  si et seulement si  $x$  et  $y$  sont dans la même partie de  $\mathcal{P}$ . Quelles sont les propriétés de  $\mathcal{F}$ ?
2. Soit  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence de  $E \times E$ . Peut-on définir une partition de  $E$  grâce à cette relation?

**Exercice 4**

Soit  $\mathcal{R}$  la relation suivante : soit  $x$  et  $y$  deux points du globe, on a  $x\mathcal{R}y$  si et seulement si  $x$  est à 1 kilomètre à vol d'oiseau. Quelles sont les propriétés de  $\mathcal{R}$ ?

**Exercice 5**

Soit  $G$  un groupe tel que l'application  $x \mapsto x^{-1}$  soit un morphisme. Montrer que  $G$  est commutatif.

**Exercice 6**

Soit  $E$  un ensemble, et  $A, B$  deux sous-ensembles de  $E$

1. Rappeler la définition de la différence symétrique.
2. Calculer  $A\Delta A$ ,  $A\Delta\emptyset$ ,  $A\Delta E$ , et  $A\Delta\bar{A}$
3. Montrer que Pour tous  $A, B, C$  sous-ensembles de  $E$ , on a

$$(A\Delta B) \cup C = (A \cup C)\Delta(B \cup C)$$

**Exercice 7**

On souhaite démontrer par récurrence que pour tout entier  $n$  et pour tout réel  $x > 0$ , on a  $(1+x)^n \leq 1+nx$ .

1. La récurrence porte-t-elle sur  $n$ ? Sur  $x$ ? Sur les deux?
2. Montrer que  $(1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2$ .
3. Rédiger la démonstration.

**Exercice 8**

Exprimer la signification de

1.  $\exists x \in Z, P, \forall x \in Z, P$
2.  $\exists x \in Z, \neg P, \forall x \in Z, \neg P$
3.  $\neg(\exists x \in Z, \neg P), \neg(\forall x \in Z, \neg P)$

Quelle est la négation de

- Tout habitant de la terre respire de l'oxygène.
- tout habitant de la terre parle le français.
- Tous les menteurs sont des idiots ou des crapules

**Exercice 9**

Evaluer les prédicats suivants :

1.  $f \rightarrow (g \rightarrow f)$
2.  $f \rightarrow (g \rightarrow h) \rightarrow ((f \rightarrow g) \rightarrow (f \rightarrow h))$
3.  $\neg f \rightarrow (g \rightarrow h) \rightarrow ((\neg f \rightarrow \neg g) \rightarrow f)$