Exercice 1

Soient trois ensembles $E = \{a, b\}$ et $F = \{c, d, e\}$, $G = \{x, y, z\}$

1. Existe-t-il des injections, surjections ou bijections de E dans F ?
2. Même question pour de F dans E.
3. Combien il y a de bijections de F dans G

Exercice 2

Soit E un ensemble fini, non vide.

1. Trouver une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$
2. Existe-t-il une surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$?

Rappel : $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E. Par exemple, $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Exercice 3

Soit une application $f : E \to F$, et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer les propriétés suivantes :

1. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Exercice 4

Soit E un ensemble.

1. Montrer que la relation d'inclusion notée $\subset$ est un ordre sur $\mathcal{P}(E)$
2. L'ordre est-t-il total ? (Un ordre $\mathcal{R}$ sur E est total si $\forall x, y \in E$ on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$.)

Exercice 5

Mon tiroir contient dix paires de chaussettes de couleurs différentes. Les paires sont défaites.

1. Dans le noir, combien dois-je tirer de chaussettes de mon tiroir pour être sûr d'avoir une paire de même couleur ?
2. Même question si j'ai cinq paires noires et cinq paires grises.
3. Même question avec trois couleurs : noir, grises et beiges, de quatre, quatre et deux paires respectivement.

Exercice 6

Vous êtes huit à dîner autour d'une table ronde avec huit places numérotées.

1. Combien y-a-t-il de plans de table différents ?
2. Même question s'il y a quatre hommes et quatre femmes, et qu'un homme doit s'asseoir à côté d'une femme
3. Même question si ce sont quatre couples et que les conjoints ne doivent pas être voisins
4. Même question si les conjoints ne doivent pas non plus être en face
5. Même question si les places ne sont pas numérotées

Exercice 7

Combien y-a-t-il de plaques minéralogiques pour un département donné, avec quatre chiffres et deux lettres, ou trois chiffres et trois lettres ?

Exercice 8

On définit l'opération $\oplus$ dans $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$: $(a, b) \oplus (c, d) = (a + b \bmod 2, c + d \bmod 3)$. Trouver un isomorphisme de $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus)$ dans $(\mathbb{Z}_6, +)$.

Exercice 9

Expliquer pourquoi

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n-k \end{array} \right)$$