Problèmes NP-complets

Dire qu'un problème est NP-complet, c'est à dire qu'il est dans NP (borne supérieure) et qu'il est difficile pour cette classe (borne inférieure). Le plus souvent, le premier point est facile alors que le second est plus délicat. Pour le montrer, on effectue souvent une réduction à un autre problème dont on sait déjà qu'il est NP-difficile. Les exercices suivants permettent de se familiariser avec cette technique.

Exercice 1 Problème de décision.

Mettre les problèmes suivants sous forme de problème de décision et évaluer la taille de leurs instances.

1. de savoir s'il existe un chemin entre deux sommets disjoints dans un graphe ;
2. de connaitre la distance entre deux sommets disjoints dans un graphe ;
3. de connaitre la longueur de la chaîne maximun dans un graphe pondéré.

Problèmes liés aux cycles hamiltoniennes

Nous allons supposer que le problème CYCLE HAMILTONIEN est NP-Complet.

CYCLE HAMILTONIEN
Données : un graphe non-orienté G.
Question : G contient-il un cycle hamiltonien ?

Exercice 2 Considérons le problème CHAINE HAMILTONIEN suivant :

CHAINE HAMILTONIENNE
Données : un graphe non-orienté G, deux sommets u et v distincts de G.
Question : G contient-il une chaine hamiltonienne entre u et v ?

Question 2.1 Montrer que le problème CHAINE HAMILTONIEN est dans NP.

Question 2.2 Montrer que le problème CHAINE HAMILTONIEN est NP-complet. Pour cela, nous allons faire la réduction à partir du problème CYCLE HAMILTONIEN. Soit $\mathcal{I} =< G = (V, E) >$ une instance du problème CYCLE HAMILTONIEN. Maintenant, nous allons transformer cette instance en une instance $\mathcal{I}'$ du problème CHAINE HAMILTONIENNE de la façon suivante : Nous allons construire un graphe $G' = (V', E')$ tel que

- Soit u un sommet arbitraire de V
- $V' := V \cup \{v\}$ tel que v est un sommet n'appartenant pas dans V
- $E' := E \cup \{(v, \ell) : \ell$ est un voisin de u dans $G\}$

Continuez la preuve.

Exercice 3 Le problème CHAINE est le problème de décision suivant

CHAINE
Données : un graphe non-orienté G de n sommets, deux sommets u et v distincts de G.
Question : G contient-il une chaine de longueur $n/2$ entre u et v ?

Question 3.1 Montrer que le problème CHAINE est NP-complet.

Question 3.2 Montrer que le problème CHAINE est NP-complet.

Exercice 4 Chevaliers de la table ronde

Etant donnés n chevaliers, et connaissant toutes les paires de féroces ennemis parmi eux, est-il possible de les placer autour d'une table circulaire de telle sorte qu'aucune paire de féroces ennemis ne soit côte à côte ?

Problèmes de graphe

Nous supposerons que le problème COUVERTURE DE SOMMETS est NP-complet

COUVERTURE DE SOMMETS
Données : un graphe non-orienté G et un entier k.
Question : G contient-il une *couverture de sommets* de cardinalité au plus k : c'est-à-dire un ensemble $\mathcal{S}$ de sommets tel que toutes les arêtes de G sont incidentes à au moins un sommet de $\mathcal{S}$?

Exercice 5 Le problème de la clique maximum.

Considérons le problème de décision CLIQUE :
Données : un graphe non-orienté $G = (V, E)$ et un entier k.
Question : Existe-t-il une clique de taille k (un sous graphe complet de k sommets) ?

Question 5.1 Nous noterons par G^c le complémentaire du graphe G.

Montrer que G a une clique de taille k si et seulement si G^c a une couverture de sommets de taille $n - k$.
Question 5.2 Montrer que le problème CLIQUE est NP-complet.

Nous allons travailler sur une restriction du problème CLIQUE en considérant uniquement les graphes dans lesquels tous leurs sommets sont de degré au plus 3. Nous le noterons 3-CLIQUE.

Question 5.3 Montrer que 3-CLIQUE est dans NP.

Question 5.4 Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant : *Nous savons que le problème* CLIQUE *est NP-complet, il suffit donc de présenter une réduction de* 3-CLIQUE *à* CLIQUE. *Étant donné un graphe G dont les sommets sont de degré inférieur à 3, et un entier k, la réduction laisse inchangée le graphe et le paramètre k : clairement le résultat de la réduction* *est une entrée possible pour le problème CLIQUE. Par ailleurs, la réponse aux deux problèmes est identique. Cela prouve la justesse de la réduction et, par conséquent, la NP-complétude de la* 3-CLIQUE*.*

Question 5.5 Donner un algorithme polynomial en $O(|V|^4)$ pour le problème 3-CLIQUE.

Problèmes de logique

Considérez le problème suivant :

k-SAT NAE
Données : un ensemble U de variables $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ et une formule logique $L = C_1 \wedge \cdots \wedge C_\ell$ avec $C_i = (y_{i,1} \vee y_{i,2} \vee \cdots \vee y_{i,k})$ où $y_{i,j}$ est égal soit à l'un des u_k ou soit à l'un des $\neg u_k$
Question : Existe-t-il une fonction $t : U \to \{0, 1\}$ telle que t satisfait L et telle que les littéraux de chaque clause ne sont pas toutes de la même valeur ?

Exercice 6 Montrer que 4-SAT NAE est NP-complet sachant que 3-SAT est NP-complet. *Indication : Introduire une nouvelle variable z et l'insérer dans toutes les clauses*

Exercice 7 Montrer que 3-SAT NAE est NP-complet sachant que 4-SAT NAE est NP-complet. 3-SAT est NP-complet. *Indication : Utiliser la technique pour la transformation de SAT en 3-SAT.*

Exercice 8 Le problème 3-couleurs.
3-Couleurs
Données : un graphe non-orienté $G = (V, E)$ et un entier k.
Question : Existe-t-il une coloration propre de G composé de 3 couleurs ?

Pour cela, nous allons faire la réduction à partir du problème 3-SAT NAE. Soit $\mathcal{I} =< U, L >$ une instance du problème 3-SAT NAE. Maintenant, nous allons transformer cette instance en une instance $\mathcal{I}'$ du problème 3-Couleurs de la façon suivante. Nous allons construire un graphe $G = (V, E)$ tel que

- Pour chaque variable u_i, il y a deux sommets qui lui sont associés : u_i et $\neg u_i$. Il y a une arête qui relie les sommets u_i et $\neg u_i$.
- Un sommet distingué v est adjacents à tous les sommets de $\{u_i, \neg u_i | u_i \in U\}$
- Pour chaque clause $C_j = (y_{j,1} \vee y_{j,2} \ \vee y_{j,3})$, trois sommets a_i, b_i, et d_i formant un triangle sont associés à la clause C_j tels que il y a une arête entre a_i et $y_{j,1}$, entre b_i et $y_{j,2}$, entre b_i et $y_{j,3}$).

Question 8.1 Construire le graphe pour la formule

$$L = (u_1 \vee \neg u_2 \vee u_3) \wedge (\neg u_1 \vee \neg u_3 \vee u_4) \wedge (u_2 \vee \neg u_3 \vee \neg u_4)$$

Question 8.2 Continuez la preuve.